Arié Stern
11- Octubre - 2013

Teorema (Dualidad de Serre)

Sea X una variedad proyectiva no singular de dimensión n sobre $k=\overline{k}$. Sea ω_X el haz canónico en X y sea $\mathcal{O}(1)$ el haz definido por los hiperplanos. Entonces

(a) Para todo $i \geq 0$ y $\mathcal{F}$ coherente en X, hay isomorfismos

$$\theta^i : \operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \longrightarrow H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

(b) Para todo $\mathcal{F}$ localmente libre en X tenemos $H^i(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ para $i<n$ y $q \gg 0$.

Def: Definimos el haz canónico de X como $\omega_X := \Lambda^n \Omega_X$ donde $n = \dim X$.

Ej: Si $X = \mathbb{P}^n_k$ entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 .$$

Luego tomando producto exterior en esta sucesión exacta se obtiene que $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$

(Aquí se uso el ejercicio 5.16 (d) del capítulo II)

Prop: Sea Y una subvariedad no singular de codimensión r en X. Entonces $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \Lambda^r N_{Y/X}$ donde $N_{Y/X}$ es el haz normal de Y en X. En particular, si $r=1$, entonces Y es un divisor en X y si $\mathcal{L}$ es el haz invertible asociado a Y entonces se tiene que

$$\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$$

Ej: Sea Y una hipersuperficie no singular de grado d en $X = \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$. Luego $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(d)$ y $\omega_Y \cong \mathcal{O}_X(-n-1) \otimes \mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{O}_Y$
$$\cong \mathcal{O}_Y(d-n-1).$$

- Si $n=2$, $d=1 \Rightarrow Y$ es una recta en $\mathbb{P}^2$, $Y \cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow \omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-2)$
- Si $n=2$, $d=2 \Rightarrow Y$ es una cónica en $\mathbb{P}^2$ y $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-1)$
- Si $n=2$, $d=3 \Rightarrow Y$ es una cúbica no singular y $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$
- Si $n=3$, $d=1 \Rightarrow Y \cong \mathbb{P}^2$ y $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-3)$
- Si $n=3$, $d=2 \Rightarrow Y$ es una superficie cuádrica ~~no~~ singular y $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-2)$.

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es el grupo de homomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos. Para $\mathcal{F}$ fijo, $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$ es un functor covariante exacto por la izquierda de $\operatorname{Mod}(X)$ a Ab y como $\operatorname{Mod}(X)$ tiene suficientes inyectivos entonces tiene sentido hacer la siguiente definición.

Def: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Definimos los functores $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \cdot)$ como el functor derivado derecho de $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$

Luego tenemos $\operatorname{Ext}^0 = \operatorname{Hom}$ y tenemos una sucesión exacta larga para una sucesión exacta corta en la segunda variable.

Prop 1: Para todo $\mathcal{G} \in \operatorname{Mod}(X)$ se tiene $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{G})$ para $i \geq 0$.

dem: Los functores $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \cdot)$ y $\Gamma(X, \cdot)$ son iguales, luego sus functores derivados son los mismos y por la proposición 2.6 se tiene que los functores derivados derechos de $\Gamma(X, \cdot)$ coinciden con $H^i(X, \cdot)$

■

Prop 2: Sea $\mathcal{L}$ un haz localmente libre de rango finito y sea $\mathcal{L}^\vee$ su dual. Entonces para todo $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X)$ tenemos

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G})$$

Obs: Notar que si $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$ en la proposición, entonces se obtiene que

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G}).$$

Volviendo a dualidad de Serre. Notemos que si en el teorema ponemos $X=\mathbb{P}^n_k$ entonces (b) es exactamente lo que nos decía el teorema 5.2 parte (b). Además, como $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$ entonces por 5.1 (c) tenemos que $H^n(X,\omega_X)\cong k$.

Algunos corolarios de la dualidad de Serre y aplicaciones.

Corolario 7.7: Para todo haz localmente libre $\mathcal{F}$ en X tenemos

$$H^i(X,\mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee\otimes\omega_X)^\vee$$

dem:

$\cancel{\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X)}$ Por prop 1 y 2 tenemos que $\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{F},\omega_X)\cong H^{n-i}(X,\mathcal{F}^\vee\otimes\omega_X)$

y por Serre $\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{F},\omega_X)\cong H^i(X,\mathcal{F})^\vee$

■

Recordar que $p_g(X) = \dim_k \Gamma(X,\omega_X)$ y este es un invariante biracional.

Notar que si $X=\mathbb{P}^n$ entonces $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$ y así $p_g(\mathbb{P}^n)=0$.

Si X es una curva proyectiva no singular, entonces $H^1(X,\mathcal{O}_X)\cong H^0(X,\omega_X)^\vee$ y como estos son espacios vectoriales de dimensión finita se tiene que $p_a(X) = h^1(X,\mathcal{O}_X) = \dim \Gamma(X,\omega_X) = p_g$.

Si X es una superficie proyectiva no singular, entonces $H^0(X,\omega_X)$ es dual a $H^2(X,\mathcal{O}_X)$, luego $p_g = h^2(X,\mathcal{O}_X)$. Por otro lado $p_a(X) = h^2(X,\mathcal{O}_X) - h^1(X,\mathcal{O}_X)$ luego $p_g \geq p_a$ y $h^1(X,\mathcal{O}_X) = q$ se llama la irregularidad de X.

Volviendo a los ejemplos de las hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$, notemos que la recta y la cónica en $\mathbb{P}^2$ tienen $p_g = 0$, y la cúbica tiene $p_g = 1$ luego la cúbica no es biracional a $\mathbb{P}^1$ y por tanto no es racional. De hecho podemos encontrar variedades proyectivas de cualquier dimensión que no sean racionales, para esto basta tomar una hipersuperficie Y en $\mathbb{P}^n$ de grado $d \geq n+1$ y así $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(\underbrace{d-n-1}_{>0})$ luego $p_g(Y) \geq 1$ y por tanto Y no es racional.

<u>Corolario 7.13</u>: Sea X una variedad proyectiva no singular de dimensión n. Para todo $p = 0, 1, \ldots, n$, sea $\Omega^p = \Lambda^p \Omega_X$ el haz de las p-formas diferenciales. Luego para cada $p, q \in \{0, \ldots, n\}$ hay isomorfismos

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p})^\vee$$

<u>dem</u>:

Por el ejercicio 5.16(b) del capítulo II se tiene que $\Omega^{n-p} \cong (\Omega^p)^\vee \otimes \omega$. Luego basta aplicar el corolario 7.7 para obtener el resultado. ∎

Se definen los números $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ que son invariantes biregulares importantes de X.