Algebrización de una deformación infinitesimal

X esquema noeth., $Y \subseteq X$ subesq. def. por $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.

Completación de X por Y = $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Espacio top: } Y \\ \text{Haz: } \mathcal{O}_{\hat{X}} := \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n \end{array}\right\} \text{espacio anillado}$$

Esquema formal Noetheriano: espacio anillado loc. $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ con un cub. fin. por abiertos $\mathcal{U}_i$ tq. $(\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathcal{U}_i})$ es isomorfo a la completación de un esq. noeth. X_i por un subesq. Y_i.

Si $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ es la completación de un solo esq. X, se dice efectivo

Deformaciones: Sea (R, m) un anillo local completo con cuerpo residual k, X_0 esquema, ξ una familia versal de deformaciones de X_0 sobre R.

Esto quiere decir que $\forall n$, X_n esq. plano y de tipo finito sobre $R_n = R/m^{n+1}$, y morfismos $X_n \to X_{n+1}$ que inducen isomorf. $X_n \to X_{n+1} \times_{R_{n+1}} R_n$.

Prop: En esta situación, existe un esquema formal noetheriano $\mathfrak{X}$, plano sobre $\operatorname{Spf} R := (\operatorname{Spec} R/m, \mathcal{O}_{\widehat{\operatorname{Spec} R}})$ tal que $\forall n$, $X_n \simeq \mathfrak{X} \times_R R_n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \leftarrow & X_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spf} R & \leftarrow & R_n \end{array}$$

Pregunta: ¿$\mathfrak{X}$ es efectivo? Es decir, es la completación de un esquema

$X \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ por la fibra sobre el punto cerrado de $\operatorname{Spec} R$?

Resumen: Familia formal $\rightsquigarrow$ Esquema formal $\overset{?}{\rightsquigarrow}$ esquema $/R$

No siempre. Pero:

Teorema (Grothendieck): Sea $\mathfrak{X}$ un esquema formal, propio sobre $\operatorname{Spf} R$ (R como antes). Suponga que existe un haz invertible $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{X}$ tal que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \times_R k$ es amplio en $X_0 = \mathfrak{X} \times_R k$. Entonces existe un esquema X/R, junto a un line bundle amplio L, tal que $\mathfrak{X} = \hat{X}$ y $\mathcal{L} = \hat{L}$, donde la completación se hace sobre la fibra cerrada sobre R. En particular, $\mathfrak{X}$ es efectivo.

Ej: $\mathrm{Hilb}: \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ $X_0 \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Hilb es pro-rep.

$\Rightarrow$ obtenemos un esquema formal $\mathfrak{X} \subseteq \hat{\mathbb{P}}^n_R$ (es proyectiva).
$\Rightarrow$ la familia formal es efectiva.

Paso difícil: Pasar de una familia sobre R a una familia sobre un esquema de tipo finito $/k$.

Queremos X/S plano, de tipo finito, $s_0 \in S$ tq. $X_{s_0} = X_0$, $\hat{X}$ por X_0 es $\mathfrak{X}$.

Artin:

Teo: Sea X_0 esq. proy. sobre k, suponga que X_0 admite una deformación versal formal efectiva $\bar{X}$ sobre R (completo, local). Entonces $\bar{X}$ es algebrizable en el siguiente sentido: $\exists$ esq. S de tipo finito $/k$, un punto $s_0 \in S$ tq. $R \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,s_0}$ y $\bar{X} \simeq X \times_S \operatorname{Spec} R$. Además, el triple (X, S, s_0) es único alrededor de s_0 en la topología étale.

No obtenemos un espacio de moduli con esto pues X/S es único pero salvo cub. étales. Esto lleva a stack...

idea de que determina localmente el moduli.