Dualidad de Serre II

GIANCARLO URZÚA
18-10-13

<u>Teo</u>: (Dualidad para $\mathbb{P}^n_k$) $X=\mathbb{P}^n_k$, k = cuerpo, $\omega_X := \wedge^n \Omega_{X/k}$ (haz canónico). Entonces,

(1) $H^n(X,\omega_X) \xrightarrow[\simeq]{t} k$. Fijar una traza t (mapeo lineal $\neq 0$);

(2) Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X, el morfismo natural
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_X)\times H^n(X,\mathcal{F})\longrightarrow H^n(X,\omega_X)\xrightarrow{t}k$$
es un perfect pairing (entre esp. vectoriales dim finita sobre k)

(3) $\forall i\geq 0$, existe $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X)\xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee$ tal que para $i=0$ tenemos el (2).

<u>dem</u>: (1) Sabemos que $\wedge^n\Omega_{X/k}\simeq \mathcal{O}_X(-n-1)$ por cálculo directo (usando $dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ en alguna carta $\mathbb{A}^n_k$ y viendo como cambia en cambio de cartas; usar al final que $\mathrm{Pic}(X)\simeq\mathbb{Z}$ generado por $\mathcal{O}_X(1)$) (o usar la sucesión de Euler $0\to\Omega^1_X\to\bigoplus^{n+1}\mathcal{O}_X(-1)\to\mathcal{O}_X\to 0$).

Pero sabemos que $H^n(X,\mathcal{O}_X(-n-1))=k$. (Charla Cohom. de $\mathbb{P}^n_k$)

(En efecto usando cohom. de Čech: $\left\langle \frac{x_0^n}{x_1\cdots x_n}\, d\left(\frac{x_1}{x_0}\right)\wedge\dots\wedge d\left(\frac{x_n}{x_0}\right)\right\rangle = H^n(X,\omega_X)$)

(2) Dado $\mathcal{F}\longrightarrow\omega_X$ morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\Rightarrow H^n(X,\mathcal{F})\longrightarrow H^n(X,\omega_X)$ y este es el nat. pairing:

$\rightarrow$ Si $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X(q)$, $q\in\mathbb{Z}$, entonces $\qquad (*)\ (\mathcal{O}_X(m)\otimes\mathcal{O}_X(s)\cong\mathcal{O}_X(m+s))$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega)\underset{\text{ejer.}}{\cong}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}^\vee\otimes\omega)=\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X(-q-n-1))=H^0(X,\mathcal{O}_X(-q-n-1))$$

$\Rightarrow$ usamos el cálculo anterior cohom. esp. proyectivos.

$\rightarrow$ Para $\mathcal{F}$ arbitrario coherente, $\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_0\to\mathcal{F}\to 0$ con $\mathcal{E}_i=\bigoplus_{\text{finita}}\mathcal{O}_X(q_j)$

ahora $\mathrm{Hom}(-,\omega_X)$ y $H^n(X,-)^\vee$ son functores contravariantes exactos por la izquierda y

Para $H^n(X,\_)^\vee$ se usa Groth. anulación para coh. H^i con $i>\dim X=n$
y $\mathcal{E}_1\xrightarrow{f}\mathcal{E}_0\to\mathcal{F}\to 0$
$\Rightarrow 0\to\ker f\to\mathcal{E}_0\to\mathcal{F}\to 0$
$\Downarrow$
$H^n(\mathcal{E}_0)^\vee\leftarrow H^n(\mathcal{F})^\vee\leftarrow 0$
$\downarrow$
$0\to H^n(\ker f)^\vee\to H^n(\mathcal{E}_1)^\vee \quad\Rightarrow\quad 0\to H^n(\mathcal{F})^\vee\to H^n(\mathcal{E}_0)^\vee\to H^n(\mathcal{E}_1)^\vee$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\omega_X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_0,\omega_X) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\omega_X) \arrow[d, "d"] \\
0 \arrow[r] & H^n(X,\mathcal{F})^\vee \arrow[r] & H^n(X,\mathcal{E}_0)^\vee \arrow[r] & H^n(X,\mathcal{E}_1)^\vee
\end{tikzcd}$$

Con flechas verticales inducidas por $(*)$ y a, c, d $\simeq$
$\Rightarrow b\simeq$. (LEMA 5)

(3) Esto es manejo de functores cohomológicos a la Grothendieck. Tenemos dos functores contravariantes $Ext^i(\_, \omega_X)$ y $H^{n-i}(X, \_)^\vee$ los cuales **(1)** dan sucesiones largas exactas en cohomología con funciones conectoras δ^i y **(2)** Para morfismos entre sucesiones exactas cortas existe morfismo compatible con los δ^i entre las sucesiones largas. (1) y (2) son prop. que definen $\underline{\delta\text{-functor}}$ (p. 205 Hartshorne).

Para sucesiones cortas exactas de haces

Luego un δ-functor es $\underline{\text{universal}}$ $T = (T^i) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ si dado otro δ-functor $T' = (T'^i) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y morfismo de functores $f^0 : T^0 \to T'^0$, $\exists!\, f^i : T^i \to T'^i$ $\forall i \geq 0$ ($f^0 = f^0$) que conmutan con los δ^i $\forall$ sucesión exacta corta. Luego

(i) Dado functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ existe a lo más un δ-functor universal $T = (T^i)$ con $T^0 = F$.

(ii) Los functores derivados $(R^i F)_{i \geq 0}$ forman un δ-functor universal y $T = (T^i)$ universal δ-functor de un functor derivado.

(iii) ¿Cómo saber que tenemos un δ-functor universal?

F es insignificante (borrable)
- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es $\underline{\text{effaceable}}$ si $\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists$ $A \overset{u}{\hookrightarrow} M$ tal que $F(u) = 0$
- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es $\underline{\text{coeffaceable}}$ si $\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists$ $M \xrightarrow{u} A \to 0$ tal que $F(u) = 0$

$\underline{\text{Teo}}$: $T = (T^i)_{i \geq 0}$ covariante δ-functor de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ tal que T^i es effaceable $\forall i > 0$ $\Rightarrow$ T es universal.

Esto es muy simple!

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & T^0(A) & \to & T^0(M) & \to & T^0(A') & \to & T^1(A) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f^1 & \\ 0 \to & T'^0(A) & \to & T'^0(M) & \to & T'^0(A') & \to & T'^1(A) & \end{array}$$

Mirar "Sur Quelques Points d'algèbre Homologique" by Grothendieck para los "detalles". (de hecho, mirar "Algebra" Lang p. 801)

Luego es fácil ver que existe f^1 (gracias al cero de la derecha) y esta determinado (ie único). Luego construir f^i similarmente.

Luego como $Ext^0(\mathcal{F}, \omega_X) \simeq H^n(X, \mathcal{F})^\vee$ $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{A} = Coh(X)$ por lo de (2), tenemos sólo que probar que ambos δ-functores son universales $\therefore$ tendremos los isomorfismos $\forall i \geq 0$ por unicidad (i) arriba.

¡Ahora recién viene el cálculo! queremos probar segundo punto de (iii) para ambos. Como $\mathcal{F}$ es coherente, tenemos

$$\mathcal{E} = \oplus \mathcal{O}_X(-q) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \qquad q >> 0.$$

(Esto es definición de amplio prácticamente; usando $\mathcal{O}_X(1)^{\otimes q}$)
y $Ext^i(\mathcal{E}, \omega_X) = \oplus H^i(X, \omega(q)) = 0 \ \ \forall i>0$ por cálculo anterior (cohomológico de $\mathbb{P}^n_k$). También $H^{n-i}(X, \mathcal{E})^\vee = \oplus H^{n-i}(X, \mathcal{O}(-q))^\vee = 0$ para $i>0$ y $q>0$. (Cohomología de $\mathbb{P}^n_k$ también)

Obs: El morfismo en (3) es altamente no explícito. [redacted]

→ La demostración para X = esquema proyectivo sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ sigue las mismas ideas más detalles sobre singularidades de X. Pero primero hay que encontrar el reemplazo de $\omega_{\mathbb{P}^n_k}$.

Def: X = esquema propio dim n $/\mathbb{K}$. Un haz dualizante de X es un haz coherente ω_X° en X tal que
(a) $\exists\, t : H^n(X, \omega_X^\circ) \twoheadrightarrow k$ morfismo traza y
(b) $\forall \mathcal{F} \in Coh(X)$, $Hom(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \times H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X^\circ)$ tal que seguido por t produce $Hom(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \simeq H^n(X, \mathcal{F})^\vee$.

→ si existe $\omega_X^\circ \Rightarrow$ es único
→ ω_X° existe para todo X propio sobre $\mathbb{K}$. Hartshorne lo prueba para X proyectivo sobre $\mathbb{K}$: si $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ codim $r \Rightarrow \omega_X^\circ = \mathcal{E}xt^r_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^n})$.
→ Si X = var proyectiva nosingular sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}} \Rightarrow \omega_X^\circ \simeq \bigwedge^n \Omega_{X/\mathbb{K}}$
$n = \dim X$ (Cor. 7.12)

Notar que tenemos $\forall i \geq 0$ y $\forall \mathcal{F} \in Coh(X)$ morfismos naturales

$$\theta^i : Ext^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \longrightarrow H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

usando lo anterior: ambos son δ-functores que coinciden (por definición) para $i=0$, y $Ext^i(\_, \omega_X^\circ)$ es universal (Por teorema de Serre anterior tenemos $H^i(X, \omega_X^\circ(q)) = 0$ para $i>0$ y $q>>0$; así es coeffaceable!) El problema es probar que $H^{n-i}(X, \_)^\vee$ lo es y se puede bajo ciertas condiciones en X (ver Teo 7.6 en Hartshorne). Si eso pasa, los funtores son naturalmente isomorfos.

Para X = Var proy. nosing $|_{\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}}$ $\Rightarrow$ si lo son. En particular:

Teo: X = Var proy nosing $|_{\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}}$ y $\mathcal{F}$ localmente libre en X
$\Rightarrow$ $H^i(X,\mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^\circ)^\vee$. $(\omega_X^\circ = \Lambda^n \Omega_X)$

Tomar $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{F} = \Lambda^r \Omega^1_{X|\mathbb{K}}$ $r = 1, 2, .., \dim X$ para algunos casos particulares, donde las dimensiones como espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ se comparan. Con estos luces tenemos invariantes biregulares de X.

Como $\Lambda^n \Omega_X$ es un line bundle (loc. libre rango 1) $\Rightarrow$ $\Lambda^n \Omega_X \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$ para ciertos divisores K_X en X llamados divisores canónicos. Entonces si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$, tenemos

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$$

típicamente reconocible en curvas: X = curva proy nosing $|_{\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}}$ y D = divisor en X $\Rightarrow$ $H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$ y luego Riemann-Roch dice

$$\dim_{\mathbb{K}} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - \dim_{\mathbb{K}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) = \deg(D) + 1 - g(X)$$

Si X es una superficie, tendremos dificultad con $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ el cual es dual a $H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$.

Las dificultades algunas veces se facilitan con algún tipo de vanishing theorem. Por ejemplo

Cor (al teo de dualidad de Serre general)

X = variedad proyectiva normal de dim ≥ 2 (en particular una nosingular es normal). Entonces para todo haz localmente libre $\mathcal{F}$ en X tenemos $H^1(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ para $q \gg 0$.

En particular, si tomamos $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, tenemos que el corte de $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ por un hiperplano es siempre conexo si X = var proy. nosingular de dim ≥ 2. Esto junto con el teorema de Bertini da que todo corte general (tomando hiperplanos $\simeq \mathbb{P}^n$ en un abierto (Zariski)) de X es una variedad nosingular proyectiva $/\mathbb{K}$. Para la demostración mirar la charla Motivacional Nº 1, p 3.

otros teoremas muy usados son Kodaira Vanishing theorem y la generalización Kawamata-Viehweg vanishing theorem; ambos ciertos para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(Kodaira) X = proy. var. nosingular dim n sobre $\mathbb{C}$ y $\mathcal{L}$ = haz invertible amplio en X (ie, las secciones de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ algún m hacen que $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$; visto como divisor $\mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{O}_X(mD)$ con $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$) $\rightarrow H^i(X, \mathcal{L} \otimes \omega_X) = 0 \quad \forall i > 0$.

Para Kawamata-Viehweg mirar libro de Kollár-Mori "Birational geometry...", o el paper de Viehweg "Vanishing theorems" Crelle 335: 1-8 (1982). Esta generalización es muy usada en geometría biracional