Conglomerados

Tema: Variedades Cluster y conecciones.

1. Álgebras cluster; log Calabi-Yau.
2. Variedades cluster y mutaciones.
3. Variedades tipo cluster.
4. Alguna aplicación (e.g. Degeneraciones de Fano, Mirror Symmetry ...)

SGA 2do 2025

Giancarlo Urzúa

I. Sobre el fenómeno cluster.

Paper referencia "Mirror symmetry and Cluster algebras" Hacking-Keel ICM.

paper fundacional "Cluster Algebras I: Fundations" Fomin-Zelevinsky [JAMS 2002]

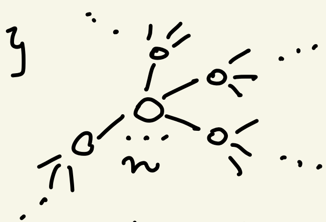
[ver "What is a Cluster Algebra?" Zelevinsky Notices 54 AMS, 2007.]

Cluster Álgebra = Álgebra de variedades relevantes en teoría rep., teoría inv, geom alg, etc...

Def 1.- variables cluster $\{z_i : i \in \mathbb{Z}\}$

Fijar rango n : Tenemos $I=\{1,\dots,n\}$

Generar un árbol regular $\mathbb{T}_n$ valencia n. :



Para cada vértice $t\in\mathbb{T}_n$, asignar n generadores $\underbrace{(x_i(t))_{t\in I}}_{\text{los clusters}}$.

Estas variables son conmutativas y

$$(2.1) \quad x_j(t) = x_j(t') \text{ si } j\neq i$$

Motivación:

- Mostrar encarnaciones cluster en geom. biracional.
- Verificar la Conj. Corti en degen. de Fanos.
- Explorar que es la Geo clusters.

$t \overset{j}{—\!—\!—} t'$ pasar por arista j significará mutar

$$(2.2)\quad x_j(t)\cdot x_j(t') = M_j(t)(x(t)) + M_j(t')(x(t'))$$

donde M_j son monomios en los x:

Sea $\mathbb{P}$ un grupo abeliano (digamos libre abeliano rango finito)

$$\therefore\ (2.3)\quad M_j(t) = p_j(t)\prod_{i\in I} x_i^{b_i}\ ,\quad p_j(t)\in\mathbb{P},\ b_i \geq 0\ \forall i .$$

\+ Axiomas:

$$(2.4)\quad x_j \nmid M_j(t)$$

$$(2.5)\quad x_i \mid M_j(t) \Rightarrow x_i \nmid M_j(t).$$

$$(2.6)\quad t_1 \overset{i}{—} t_2 \overset{j}{—} t_3 \qquad x_j \mid M_i(t_1) \iff x_i \mid M_j(t_2)$$

$$(2.7)\quad t_1 \overset{i}{—} t_2 \overset{j}{—} t_3 \overset{k}{—} t_4 \qquad \frac{M_i(t_3)}{M_i(t_4)} = \frac{M_i(t_2)}{M_i(t_1)}\Bigg|_{x_j = \frac{M_0}{x_j}}$$

donde $M_0 = (M_j(t_2) + M_j(t_3))\big|_{x_i = 0}$.

los coeficientes del álgebra

$\mathbb{Z}\mathbb{P}$ = anillo de $\mathbb{P}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Def.- $\mathbb{A} :=$ anillo con 1 en $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ generado por todos los $p_i(t)$.
El álgebra cluster $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}(M)$ de rango n sobre $\mathbb{A}$ asociada a M es la $\mathbb{A}$-subálgebra con 1 generada por la unión de todos los cluster; se puede ver en $k(\mathbb{Z}\mathbb{P})(x_1, \dots, x_n)$, $\forall$ cluster.

Ejemplo: En rango 1: $\underset{x}{\circ} \overset{1}{\text{———}} \underset{x'}{\circ}$ $\qquad xx' = p + p'$

pensar en $\mathbb{Z}[p, p']$ o $\mathbb{Z}[p^{\pm 1}, p'^{\pm}]$.

Ejemplo: anillo de coordenadas de $SL_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad = 1 + bc \right\}$

mutación $a = x \cdot d = x' = 1 + \underbrace{bc}_{p'}$

$\therefore$ cluster $\subseteq \mathbb{C}[c, b][x, x']$ generados por x, x'
bajo la mutación $xx' = 1 + bc$.

Obs 1.- Los axiomas que construyen una álgebra cluster producen el fenómeno Laurent: Dado un cluster de variables, todas las variables cluster se pueden expresar como polinomios de Laurent con coeficientes enteros ($\mathbb{Z}\mathbb{P}$). [Parece esto ser clave en la motivación.]

Ejemplo: Con coeficientes triviales, en rango 2 tenemos:

Dados $b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$ considerar variables cluster $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ tales que

$$x_{m-1}\, x_{m+1} = \begin{cases} x_m^b + 1 & m \text{ impar} \\ x_m^c + 1 & m \text{ par} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ álgebra cluster $\mathcal{A}(b,c) \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2)$

$$\dots \leftrightarrow \{x_0, x_1\} \longrightarrow \{x_1, x_2\} \leftrightarrow \{x_2, x_3\} \leftrightarrow \dots$$

En general: $$x_{m-1} \cdot x_{m+1} = \begin{cases} q_m x_m^b + c_m & m \text{ impar} \\ q_m x_m^c + c_m & m \text{ par} \end{cases}$$

tal que q_m, r_m satisfacen ...

Teorema:

$$bc \leq 3$$
$$\Updownarrow$$
finite many seeds.

Def.- Un par (X,D) se dice log Calabi-Yau par si:
(1) X = variedad proyectiva compleja nosingular
(2) D = divisor con cruces simples normales tal que $K_X + D \sim 0$.

$\iff$ Existe una diferencial en $H^0(X, \Omega^n_X(\log D))$ con polos unicamente determinados salvo $\cdot \mathbb{C}^\times$.

Def.- Una variedad U es log Calabi-Yau si existe log Calabi-Yau par (X,D) tal que $U = X \setminus D$.

Def.- (X,D) log CY tiene borde maximal si D tiene un 0-estrato ie $(p \in D \subset X) \simeq (0 \in \{z_1 \cdots z_n = 0\} \subset \mathbb{C}^n)$, $n = \dim X$.
U log CY tiene borde maximal si $U = X \setminus D$ ✓.

Def.- U log CY es positiva si $\exists (X,D)$ con $\Sigma D_i = D$ tal que existen $a_i > 0$ y $\Sigma a_i D_i$ es amplio (y así U es afín).
$U = X \setminus D$

Ejemplo: (blow-ups no tóricos)

Sea (X, D) un par log CY y $Z \subset X$ nonsingular, codim 2 contenido en 1 componente de D solo/. y transversal a los otros. Sea $\pi : \tilde{X} \to X$ el blow-up de Z.

$$\begin{array}{c} \tilde{X} \\ \cup \\ \tilde{D} \end{array} = \text{transformada estricta}$$

$$\Rightarrow \quad K_{\tilde{X}} \sim \pi^*(K_X) + E \quad (\text{en general } + (\operatorname{codim} Z - 1) E)$$

$$K_{\tilde{X}} \sim \pi^*(-D) + E = -\tilde{D} - E + E = -\tilde{D} \quad \Rightarrow (\tilde{X}, \tilde{D}) \text{ log CY}.$$

Def.- Un modelo tórico de un U log CY es un (X, D) junto con $f : (X, D) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{D})$ tal que

- $(\bar{X}, \bar{D})$ es variedad tórica y borde tórico.
- f es composición de blow-ups no tóricos.

Ej.- $X' = \mathbb{P}^2$, $D' = Q + L \Rightarrow U = X' \setminus D'$ es log CY