Sesion 1: Intro a curvas.

Acuerdo: (1) Curva = • integral scheme
• dim 1
• proper over k
• smooth (all local rings are regular)

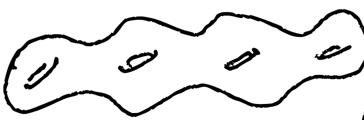
Asumimos por el momento $k=\bar{k}$.

(2) punto = punto cerrado

Def: El género se define como

$$g(C) = h^1(C,\mathcal{O}_C) \underset{SD}{=} h^0(C,\omega_C)$$

Observación: Cuando $k=\mathbb{C}$,

$C^{top} =$  Riemann surface (compacta, orientada, $\dim_{\mathbb{R}}=2$)

g es topológico!!

$$\chi_{top}(C) = V-E+F = 2-2g$$
$$= b_0 - b_1 + b_2 = h^0(C,\mathbb{Z}) - h^1(C,\mathbb{Z}) + h^2(C,\mathbb{Z})$$

Def: (1) Un divisor (de Weil) en C es un elemento del grupo libre abeliano

$$\bigoplus_{p \in C} \mathbb{Z} P$$

$D = \sum n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

(2) $\deg(D) := \sum n_i$

(3) D_1, D_2 son linealmente equivalente si

$D_1 - D_2 = \operatorname{div}(f)$ para alguna función $f \in K(C)$

$\Longrightarrow \deg(D_1) = \deg(D_2)$

Recuerdo: $f : C_1 \longrightarrow C_2$ morfismo.

(1) $f(C_1) = pt$. o (2) $f(C_1) = C_2$ y ext. $K(C_1) \supset K(C_2)$ finita

$\deg(f) = 0$ "Pf": $f \in k$ ✓

$f \notin k$ $k(f) \subset K(C)$ finita

inducida por $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$

y $\operatorname{div}(f) = \varphi^*(0 - \infty)$ □

sobre $\mathbb{C}$ $\quad f \in \mathbb{C}(C)$ función meromorfa en C

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr] & \mathbb{C} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

(4) $\deg : Cl(C) = \text{Div}/_{\text{lin equiv.}} \longrightarrow \mathbb{Z}$ homom.

(5) $D = \sum n_i P_i$ es <u>efectivo</u> si $n_i \geq 0$.

$$|D| = \left\{ D' \in \text{Div}(C) \;\middle|\; \begin{array}{l} D' \text{ efectivo} \\ D' \sim_{l.e.} D \end{array} \right\}$$

<u>Cartier Divisors</u>

<u>Recuerdo</u>: Un divisor de Cartier es una sección global $D \in \Gamma(C, K(C)^*/\mathcal{O}_C^*)$

$D = \{(U_i, f_i)\}_i \quad f_i \in \Gamma(U_i, K^*)$

$f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_C^*)$

$D_1 \sim_{l.e} D_2$ si $D_1 - D_2 = \{(U_i, f_i/g_i)\}$ es principal $\in \mathrm{Im}\left(\Gamma(K^*) \to \Gamma(K^*/\mathcal{O}^*)\right)$

(2) $\mathcal{O}_X(D)\big|_{U_i} := \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_{U_i}$ invertible

$$\mathrm{Pic}(X) = \left(\begin{Bmatrix}\text{inv. sheaves} \\ \text{mod iso}\end{Bmatrix}, \otimes\right) \text{ ab. gp.}$$

$\boxed{X \text{ sm.}}$

$$\begin{tikzcd} & Cl(X) \arrow[dl, leftrightarrow, "\sim"'] \arrow[dr, "\wr"] & \\ CaCl(X) = \frac{CaDiv}{\sim} \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Pic}(X) \end{tikzcd}$$

$\wr \rightsquigarrow$ Factorial. loc. UFD.

$$D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$$

$$\{(U_i, f_i)\} \longmapsto D = \sum_{Y \cap U_i \neq \emptyset} v_Y(f_i) Y$$

<u>Volvamos a Curvas</u>

Recordemos que

$$\mathcal{O}_C(D)(\mathcal{U}) = \left\{ f \in K(C) \;\middle|\; \operatorname{div}(f)\big|_{\mathcal{U}} \geq -D\big|_{\mathcal{U}} \right\}$$

localmente $\mathcal{O}_C(D)\big|_{\mathcal{U}_i} \simeq f_i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow[\cdot f_i]{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_C(D)(\mathcal{U}_i) = \left\{ f \in K(C) \;\middle|\; \underbrace{f \cdot f_i \in \mathcal{O}_C(\mathcal{U}_i)}_{\text{regular en } \mathcal{U}_i} \right\}$$

$$\operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(f_i)\big|_{\mathcal{U}_i} \geq 0.$$

$$\Rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \left\{ f \in K(C) \;\middle|\; \operatorname{div}(f) \geq -D \right\}.$$

<u>Prop 7.7</u>:

$$|D| \xleftrightarrow{1 \text{ a } 1} \mathbb{P}(H^0(C, \mathcal{O}_C(D)))$$

$$D' \longmapsto (s)_0, \quad s \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \bmod k^*.$$

$\dim |D| = h^0(\mathcal{O}_C(D)) - 1$

Obs: (Lemma 1.2) (1) $|D| \neq \emptyset \Rightarrow \deg \geq 0$

(2) $|D| \neq \emptyset$ y $\deg(D) = 0$, entonces $D \sim 0$.

$\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}$.

Line bundles & morphisms to $\mathbb{P}^n$.

$\{s_0, \dots, s_r\}$ base de $V \subset H^0(C, \mathcal{L})$

$\deg \mathcal{L} = d$ $\quad\hookrightarrow \dim r+1$.

Assumimos $\forall p \in C \; \exists i \in \{0, \dots, r\}$ s.t. $s_i(p) \neq 0$.

$\boxed{\mathcal{L}_p \text{ is a DVR} \quad \begin{array}{l} \mathcal{L}_p \longrightarrow \mathcal{L}_p/m_p\mathcal{L}_p \simeq k \\ s_{i,p} \longmapsto s_i(p) \end{array}}$

Def: El triple $(\mathcal{L}, V, \{s_0, \dots, s_r\})$ se llama un g^r_d. E induce un morphism

$\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}(V)^\vee$ canonical.

$p \longmapsto \lambda s \in V$ s.t. $s(p) = 0$.

altenativa

$$\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$
$$p \longmapsto [s_0(p) : \ldots : s_r(p)] .$$

$$G^r_d(C) = \left\{ \left(\mathcal{L}, V, \{s_0, \ldots, s_r\} \right) \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \varphi : C \to \mathbb{P}^r \quad \deg(C) = d \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\deg(\varphi^* \mathcal{O}(1)) = d .$$

"grupo de d puntos en C que se mueven con r grados de libertad"

Comentar BN gral dim $G^r_d(C) = ?$

Thm (IV 1.3 Riemann-Roch)

Sea D un divisor en una curva C de género g. Entonces

$$\chi(\mathcal{O}_C(D)) = h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^1(\mathcal{O}_C(D)) = \deg(D) + 1 - g$$

Obs: $h^1(\mathcal{O}_C(D)) = h^0(\omega_C \otimes \mathcal{O}_C(D)^\vee)$

$$= h^0(\mathcal{O}_C(K_C - D)) .$$

$$/ \dim|D| - \dim|K_C - D| = \deg D + 1 - g /$$

exp. dim $\rho = g - (r+1) \cdot (g - d + r)$

Proof:

Paso 1: $D = 0$

$$h^0(\mathcal{O}_C) - h^1(\mathcal{O}_C) = 1 - g$$

Recordar que $g = h^1(\mathcal{O}_C)$ por definición y

$$h^0(\mathcal{O}_C) = k^{\oplus \text{componentes conexas}} \underset{C \text{ irred.}}{=} k$$

Paso 2: Demostramos que la formula es cierta para D si y solo si es cierta para $D+p$, $p \in C$.

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathcal{O}_C(-p)}}{m_p} \to \mathcal{O}_C \to k(p) \to 0 \qquad - \otimes \mathcal{O}_C(D+p)$$

$$0 \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(D+p) \to k(p) \to 0$$

Recordar que

$\chi : K_C \to \mathbb{Z}$ hom

K_C ↳ Grothendieck group

free ab. group gen. by $F \in Coh(C)$ relation

$F_1 + F_2 = F_3$ if

$0 \to F_1 \to F_3 \to F_2 \to 0$.

$$\Longrightarrow \chi(\mathcal{O}_C(D)) = \chi(\mathcal{O}_C(D+p)) + \chi(k(p))$$

$$\chi(k(p)) = h^0(k(p)) = 1$$

y $\deg(D) + 1 = \deg(D+p)$

<u>Paso 3</u>: Observar que todo divisor se puede obtener sumando/restando finitos puntos al divisor 0. $\square$

Obs:

(1) $D=0$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{h^0(\mathcal{O}_C)} - \underset{\substack{\|^{SD} \\ h^1(\mathcal{O}_C) \\ \| \\ g}}{h^0(K_C)} = \deg K_C + 1 - g$$

$$\Longrightarrow \boxed{\deg K_C = 2g-2}$$

(2) Cuando $\deg D > 2g-2$, $h^0(K_C - D) = 0$
y RR se lee

$$h^0(\mathcal{O}_C(D)) = \deg D + 1 - g.$$

$$\dim |D| = \deg D - g.$$

(3) $g(C)=0 \iff C \simeq \mathbb{P}^1$.

By RR $\underset{\substack{\| \\ \langle s_0, s_1\rangle}}{h^0(\mathcal{O}_C(p))} = 1+1-0 = 2$ $\quad |p| \cong \mathbb{P}^1$.

$\varphi : C \xrightarrow{|P|} \mathbb{P}^1$ de grado 1. $\quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(pt.)$

$K(\mathbb{P}^1) = k(x) \simeq K(C)$ $\Big\} \Rightarrow C \simeq \mathbb{P}^1$.

(4) $g(C) = \underline{1}$ llamamos C una **curva elíptica**

$\deg(K_C) = 0$ y por RR

$$h^0(K_C) = 0 + 1 - 1 + \underset{\substack{\shortparallel \\ h^0(\mathcal{O}_C) = 1}}{h^1(K_C)} = 1.$$

$\Rightarrow K_C \sim 0$.

$P_0 \in C$, (C, P_0) tiene estructura de **grupo abeliano**!

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \quad \text{es 1 a 1} \\ p &\longmapsto \mathcal{O}_C(p - P_0) \end{aligned}$$

$\mathrm{Pic}^0(C) \to$ divisores de grado 0.

Lema: $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(C)$, $\exists !\, p \in C$ tal que $\mathcal{O}_C(p - P_0) \cong \mathcal{L}$.

Pf: $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D)$, por RR

$$h^0(\mathcal{O}_C(D+p_0)) - h^0(\cancel{\mathcal{O}_C(K_C - D - p_0)}^{\,0}) = 1+1-1 = 1$$

$\Rightarrow h^0(D+p_0) = 1$ i.e. $|D+p_0| = \{pt\}$

$\exists!$ divisor efectivo de grado 1 tal que

$$p \sim D + p_0$$

$$D \sim p - p_0 \Rightarrow \mathcal{L} \cong \mathcal{O}(p - p_0) \quad \square$$

Recuerdo: $f: C_1 \to C_2$ finito

$$0 \to f^*\Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1} \to \Omega_{C_1/C_2} \to 0.$$

$$R_f = \sum \text{length}_p(\Omega_{C_1/C_2})\, p.$$

Riemann-Hurwitz

$$\Rightarrow \boxed{K_{C_1} \sim f^*K_{C_2} + R}$$

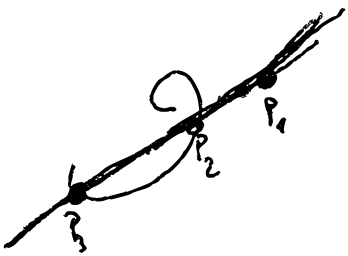
Version Geometrica de RR.

C curva suave $\phi: C \to \mathbb{P}^r$ D efectivo

$$\overline{\phi(D)} := \bigcap_{D \le \phi^*H,\ \phi(C) \not\subset H} H.$$

Si ϕ es un embedding $D = P_1 + \ldots + P_d$

$\overline{\phi(D)} = \text{span}\{\phi(P_1), \ldots, \phi(P_d)\}$.



$\mathbb{P}^3$ $\quad \overline{\phi(D)} = \mathbb{P}^1 = \ell_{P_1, P_2, P_3}$.

<u>Geometric Riemann-Roch</u>

D effectivo de grado d en una curva de genero $g > 1$.

$$\dim |D| = d - 1 - \dim \overline{\Phi_{K_C}(D)}$$

<u>Obs</u>: $|K_C - D| \subset |K_C|$

$$D' \longmapsto D' + D.$$

$\Rightarrow$ $|K_C - D|$ = divisores effectivos en $|K_C|$ que contienen D.

$$\phi_K : C \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}(K_C))^\vee \cong \mathbb{P}^{g-1}$$

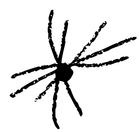
$|K_C|$ = hyperplanos en $\mathbb{P}^{g-1} = (\mathbb{P}^{g-1})^\vee$

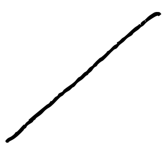
$|K_C - D| =$ hyperplanos en $\mathbb{P}^{g-1}$ que pasan por D.

obs: es un subespacio de $(\mathbb{P}^{g-1})^\vee$ de dimensión complementaria a $\Phi_K(D)$

e.g. $\mathbb{P}^2$ $\qquad$ $(\mathbb{P}^2)^\vee$

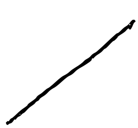
$\cup$

 $\mathbb{P}^1$

 pt.

$\mathbb{P}^3$ $\qquad$ $(\mathbb{P}^3)^\vee$

 $\mathbb{P}^2$

 $\mathbb{P}^1$

 pt

$$\dim |K_C - D| + \dim \overline{\Phi_k(D)} = g-2$$

entonces

$$\dim|D| = d-1 - \dim \overline{\Phi_k(D)}$$

$$\begin{array}{c} \dim|D| \\ \shortparallel \\ h^0(D)-1 \end{array} = d-1-\left(g-2-\begin{array}{c}\dim|K_C-D|\\ \shortparallel \\ h^0(K_C-D)-1\end{array}\right)$$

equiv. a RR.

<u>Comentarios</u>: $\dim|D| = \deg D - 1 - \dim \overline{\Phi_k(D)}$

(1) Supongamos $D = P_1 + \dots + P_d$ puntos distintos.

$\dim|D| =$ numero de relaciones lineales independientes entre los puntos $\Phi(P_i)$.

(2) D se llama especial si $h^1(D) \neq 0$.

son aquellos cuyos puntos <u>no</u> son independientes en la curva canonica.

Algunas consecuencias

Vamos a ver que $\Phi_K(C)$ es no degenerado $(g \geq 2)$ y que cuando C no es hyperelíptica Φ_K es un embedding.

D efectivo general ($\overline{\Phi_K(D)}$ tiene dim max) $\mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}^d(C) \longrightarrow$ variedad de dim g.

$\mathcal{O}_C(D) \longrightarrow$ fuera de un cerrado de Zariski.

$d \leq g$

$$\dim \overline{\Phi_K(D)} = d-1$$

$$\Rightarrow \dim |D| = 0 \text{, i.e., } |D| = \{D\}.$$

$d \geq g$: $\dim \overline{\Phi_K(D)} = g-1$

$$\dim |D| = d-g.$$

Curvas en $\mathbb{P}^n$ y la curva canónica (IV, § 3,5)

Recordar: (1) $\mathcal{L}$ es muy amplio si $\exists$

$$C \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}(1).$$

(2) $\mathcal{L}$ amplio si $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(C)$ $\exists n \geq 0$ s.t. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ es globalmente generado

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{ev} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n.$$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}^n$ es muy amplio para algún $n > 0$.

(3) $V \subset |D|$ sistema lineal $p \in C$ es punto base si $\forall D' \in V$ $p \in \mathrm{supp}(D')$.

(4) $|D|$ es base-point free si y solo si $\mathcal{O}_C(D)$ es globalmente generado.

Prop 3.1: (a) $|D|$ es base-point free si y solo si $\forall p \in C$ $\dim|D-p| = \dim|D| - 1$.

(b) D es muy amplio si y solo si
$\forall p, q \in C$
$$\dim |D-p-q| = \dim |D| - 2 . \quad (\star)$$

<u>Proof:</u> (a) Tomamos secciones globales de
$$0 \to \mathcal{O}(D-p) \to \mathcal{O}(D) \to k(p) \to 0$$
$$0 \to H^0(D-p) \to H^0(D) \to k$$
$$\Rightarrow \quad \dim |D-p| = \begin{cases} \dim |D| & (i) \\ \dim |D| - 1 . & (ii) \end{cases}$$

caso (i) $\quad |D-p| \longrightarrow |D|$ sobre.
$$D' \longmapsto D'+p$$

(b) Observar que $|D|$ es base-pt. free
$$\varphi_D : C \longrightarrow \mathbb{P}^n \qquad n = \dim |D| .$$

$(\star)$ $\forall p, q \in C$ q <u>no</u> es un punto base de $|D-p| \Leftrightarrow \exists s \in \mathcal{O}(D)$ $\quad s(p) = 0$
$$s(q) \neq 0 .$$

Si $p=q$

$$\dim|D-2p| = \dim|D|-2$$

$\exists\ D' \in |D-p|$ s.t. $D' \notin |D-2p|$, i.e.

$\exists\ \underset{\underset{|D|}{\cap}}{D'}$ s.t. $p \in \operatorname{Sopp} D'$ but $H_{D'} \not\supset T_p(C)$

i.e. $\exists\ t \in T_p(C)$ s.t. $t \notin T_p(D')$ $\square$

<u>Consecuencias</u>:

(1) $\deg D \geq 2g$, then $|D|$ is base-pt. free

(2) $\deg D \geq 2g+1$, D es muy amplio.

<u>Pf</u>: $\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow h^1(D-p)=0 \\ (2) \Rightarrow h^1(D-p-q)=0\end{array}\right\}$ RR nos da el resultado.

(3) Un divisor de grado positivo es amplio

<u>Pf</u>: $\deg(nD) = n\deg D \geq 2g+1$ para $n>>0$.

<u>Ejemplo</u>: C elíptica, $D = P_1+P_2+P_3$ muy amplio.

RR

$$h^0(\mathcal{O}_C(D)) - \cancel{h^0(\mathcal{O}_C(K-D))}^{\,\to 0} = 3$$

$$\Rightarrow |D| \cong \mathbb{P}^2$$

$$\phi_D : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

Toda curva elíptica se puede realizar como curva plana de grado 3

$$C = V(f_3(x_0, x_1, x_2) = 0)$$

$I \subset R \to R/I$

$N \otimes R/I$

$$\left(I_C / I_C^2\right)^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C)\big|_C$$

Por otra parte

$$C \overset{\varphi}{\subset} \mathbb{P}^2$$

<u>ejercicio</u>

$$0 \to T_C \to \varphi^* T_{\mathbb{P}^2} \to N_{C/\mathbb{P}^2} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_C(-K_C) \to \varphi^* T_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C)\big|_C \to 0.$$

tomando $\det(-)$

$$\mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{O}_C(-K_C) = \mathcal{O}_C(3)$$

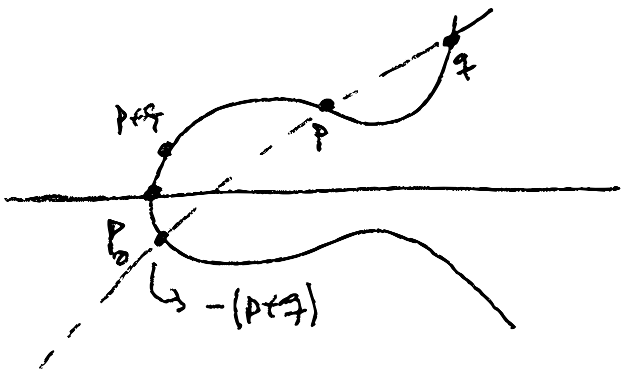
$$\Rightarrow d^2 - 3d = 2g - 2$$

$$\Rightarrow g = \frac{d^2 - 3d + 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

si $d=3$,

$$g = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Toda curva plana de grado 3 es elíptica!!



$D = 3P_0$

Un poco de geometría projectiva

$X \subset \mathbb{P}^n$, $\quad \mathrm{Sec}X = \bigcup_{l \text{ secant line}} l \subset \mathbb{P}^n$

se llama variedad secante de X

$\mathrm{Tan}X = \bigcup_{l \text{ tangente}} l$

$\subset \mathbb{P}^n$

locally

$$(X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \operatorname{Sec} X$$

$$\left(\underset{\overset{\shortparallel}{p}}{[p_0, \dots, p_n]}, \underset{\overset{\shortparallel}{q}}{[q_0, \dots, q_n]}, \underset{\overset{\shortparallel}{t}}{[t_0, t_1]} \right) \longmapsto [t_0 p_0 + t_1 q_0, \dots, t_0 p_n + t_1 q_n]$$

$\dim \operatorname{Sec} X \leq 2 \dim X + 1$. $X = C$

≤ 3 in C

$$C \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \operatorname{Tan} C$$

$\dim \operatorname{Tan} C \leq 2$.

$$\mathbb{P}^n \overset{\pi_0}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^{n-1} \qquad 0 \in \mathbb{P}^n$$

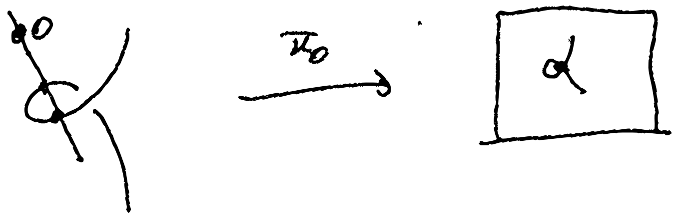
π_0 is an embedding if $0 \notin \operatorname{Sec} \cup \operatorname{Tan}$

<u>Prop</u> (3.6) Any curve can be embedded in $\mathbb{P}^3$.

<u>Pf</u>: Tomar D con $\deg D \geq 2g+1$

$C \overset{|D|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{\dim |D|}$ y proyectar. $\square$

Thm 3.10: C curva en $\mathbb{P}^3$. Entonces $\exists\, O \in \mathbb{P}^3$ tal que $\pi_O : C \to \mathbb{P}^2$ es birracional y la imagen es a lo más nodal



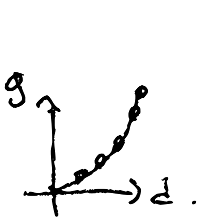
Problema de Castelnuovo (1893)

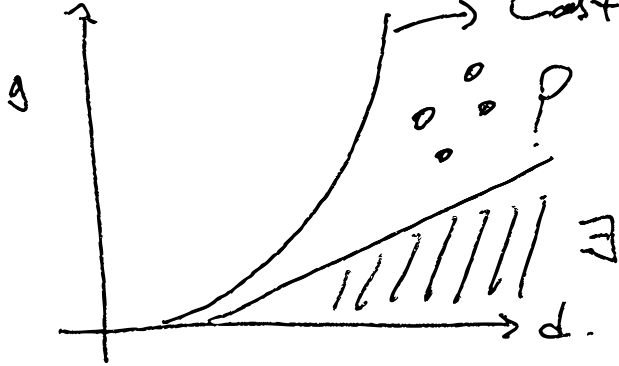
Q: Para que (g,d) existe una curva de genero g y grado d en $\mathbb{P}^3$?

Rmk: Curvas planas

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \qquad\qquad g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

suav. $\qquad\qquad$ nodal





$$g \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & d \text{ par} \\ \frac{1}{4}(d^2-1) - d + 1 & \text{odd} \end{cases}$$

$k(k+1)$

Gruson-Peskine '78

Harris '80

⋮

Macri-Schmidt (2020) : Alg. Geom.

Curvas Canónicas

__Thm__: Sea C curva de género $g \geq 3$ no hyperelíptica. Entonces

$$\Phi_{K_C} : C \xrightarrow{|K_C|} \mathbb{P}^{g-1}$$

es un embedding.

$g=0 \quad |K_C|=\emptyset \qquad g=1 \quad |K_C|=\{\mathcal{O}_C\}$

<u>Lemma 5.1</u>: Si $g\geq 2$, $|K_C|$ es libre de puntos base.

<u>Pf</u>: $p\in C$. Por definición $\dim|K| = h^0(C,\omega)-1$
$= g-1$.

RR

$$h^0(K_C-p)-\overset{=1}{\cancel{h^0}}(p) = 2g-3+1-g = g-2$$

Pero C no es racional $\Rightarrow |p|=0$

$\Rightarrow \dim|K_C-p| = g-2 = \dim|K|-1$. $\square$

<u>Prop. 5.2</u>: C curva $g\geq 2$. Entonces ω_C es muy amplio si y solo si C no es hyperelíptica.

<u>Pf</u>: $\Phi_K: C \xrightarrow{|K_C|} \mathbb{P}^{g-1}$. Por demostrar que

$\forall p,q\in C \quad \dim|K_C-p-q| = g-3$.

$\Longleftrightarrow C$ no es hyperelíptica.

Por RR

$$h^0(p+q) - h^0(K_C - p - q) = 2 + 1 - g$$

$\Rightarrow$ $\dim |K_C - p_1 - q| = g-3$ si y solo si

$\dim |p+q| = 0$.

C hyp. $\Leftrightarrow$ $\exists\, g^1_2$ $C \to \mathbb{P}^1$

$\Leftrightarrow$ $p,q \in C$ s.t. $|p+q| \cong \mathbb{P}^1$

$\Leftrightarrow$ $\dim |p+q| \neq 0$.

$\square$

$C \xhookrightarrow{|K_C|} \mathbb{P}^{g-1}$ se llama <u>curva canónica</u> y tiene grado $2g-2$.

<u>$g=3$</u> / $C \subset \mathbb{P}^2$ $\deg(C) = 4$

$$C = \{ f_4(x_0, x_1, x_2) = 0 \} = \{ a_0 x_0^4 + a_1 x_0^3 x_1 + a_2 x_0^3 x_2 + \dots + a_{14} x_2^4 = 0 \}$$

$\underline{Q}$: Es verdad que para todo polynomio $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{14}) \in k^{15}$ tal que $C_{\vec{a}} = \{f_{\vec{a}}(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ es suave,

$$g(C) = 3 \;?$$

<u>Adjunction</u>:

$$\boxed{N^\vee = I_C / I_C^2}$$

$$0 \to T_C \to T_{\mathbb{P}^2}|_C \to N_{C/\mathbb{P}^2} \to 0.$$

$$N_{C/\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C)|_C$$

$$\det(T_{\mathbb{P}^2}|_C) \cong \det(T_C) \otimes \det(N_{C/\mathbb{P}^2})$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_C \cong \omega_C^\vee \otimes \mathcal{O}_C(4)$$

$$\Rightarrow \quad 2g - 2 = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow g = 3.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & {|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| \simeq \mathbb{P}^{14}} \arrow[dr, dashed] & \\
k^{15} \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, dashed] & & \mathcal{M}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \text{curvas de} \\ \text{genero } 3 \end{array} \right\} / \text{iso}
\end{tikzcd}
$$

$$a = (a_0, \dots, a_{14}) \longmapsto [C_a].$$

$\boxed{\mathcal{M}_3 \text{ es unirracional}}$

<u>$g = 4$:</u>

$$C \subset \mathbb{P}^3 \qquad \deg(C) = 6.$$

$$0 \to I_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_C \to 0 \qquad / \otimes \mathcal{O}(2)$$

$$0 \to I_C(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to \mathcal{O}_C(2) \to 0 \qquad / \ H^0(-)$$

$$0 \to H^0(I_C(2)) \to \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))}_{\dim = \binom{5}{2}} \to H^0(\underbrace{\mathcal{O}_C(2)}_{\deg = 12}) \to \cdots$$

Por RR

$$h^0(\mathcal{O}_C(2)) = 12 + 1 - 4 + h^0(\overset{0}{\cancel{\mathcal{O}_C(-2)}} \otimes \omega_C)$$
$$= 9$$

$$\mathcal{O}_C(2) = 2K_C$$

$\Rightarrow \dim H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^3}(2)) \geq 1$

$\exists f$ polynomio hom. de grado 2

$V(f) \supset C$

$\mathbb{P}^3 \supset \overset{\shortparallel}{Q}$ irreducible!! (La curva canonica nunca es degenerada)

Por otra parte

si $\exists Q' \neq Q$ tal que $C \subset Q'$

$\Rightarrow C \subset \underbrace{Q \cap Q'}_{\text{curva de grado } 4}$ $\times$

$\therefore$ C está contenida en una única cuádrica.

El mismo cálculo

$h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^3}(3)) \geq 5$

$F = Q \cup H$ reducible es un subespacio de dim 4 $\Rightarrow \exists !\, F$ irreducible tal que $C \subset F$

$C \subset \underbrace{Q \cap F}_{\text{curva de grado } 6\,!}$

$$C = Q \cap F = V\begin{pmatrix} f_2(x_0,x_1,x_2,x_3)=0 \\ f_3(x_0,x_1,x_2,x_3)=0 \end{pmatrix}$$

<u>Q</u>: Es verdad que para $Q, F \subset \mathbb{P}^3$ ired tal que $Q \cap F = C$ suave, C es una curva canónica ?

<u>Respuesta</u>: Si.

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)| \times |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)| \dashrightarrow \mathcal{M}_4$$
$$(Q, F) \longmapsto Q \cap F$$

es una parametrización unitacional de $\mathcal{M}_4$.

$$0 \to T_F \to T_{\mathbb{P}^3}|_F \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|_F \to 0$$

$$0 \to T_C \to T_F|_C \to \mathcal{O}_F(2)|_C \to 0$$

en F

$\det T_F \otimes \det \mathcal{O}_F(3) \simeq \mathcal{O}_F(4)$ en F

$\omega_C^\vee \otimes \mathcal{O}_C(2) \simeq (\det T_F)|_C$ en C

$\simeq (\mathcal{O}_F(4) \otimes \mathcal{O}_F(-3))|_C$

$\simeq \mathcal{O}_C(1)$

$\Rightarrow \omega_C \simeq \mathcal{O}_C(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_C$

C es una curva canónica en $\mathbb{P}^3$

y $2g-2 = 6 \Longrightarrow \boxed{g=4}$ $\square$

<u>Lo que faltó</u>: * $J(C) = \mathrm{Pic}^0(C)$ variedad abeliana de dim g

* Thm. de Abel

$C^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)$

* Curvas en superficies
* Curvas nodales.
* Curvas elípticas