Moduli de Curvas $\mathcal{M}_g$

Lenguaje moderno:

X variedad (scheme)

functor de puntos

$$X : Sch^{op}/_k \longrightarrow Sets$$

$$T \longmapsto Hom(T, X)$$

$$X(k) = X(\operatorname{Spec} k) = \{\operatorname{Spec} k \to X\}.$$

e.g. ⇝

$$Hom_p(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2), X) = T_p X$$

$$Hom(R, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \simeq (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee \quad \text{ejercicio}$$

$$X(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) = TX.$$

Def: $F : Sch/_k \to Sets$ es *representable* si $\exists X$ scheme tal que $X(-) = F$.

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{matrix} C \text{ curva suave} \\ \text{de género } g \end{matrix} \right\} \Big/ \text{iso}. \quad (\star)$$

$$\mathcal{M}_g^F : Sch \longrightarrow Sets$$

$$T \longmapsto \left\{ \begin{matrix} \mathcal{C} \longrightarrow T \\ \text{planos donde} \\ \text{las fibras son} \\ \text{curvas suaves} \\ \text{de género } g \end{matrix} \right\} \Big/ \text{iso}$$

$Sch/\mathbb{C}$

$\cap$

$stack/\mathbb{C}$

$\mathcal{M}_g^F$ no es representable.

$\exists$ una variedad

irreducible $\mathcal{M}_g$ tal que $(\star)$ y

toda familia $\mathcal{C} \xrightarrow{f} T$ induce

un morfismo $T \longrightarrow \mathcal{M}_g$.

$$\mathcal{M}_{g,n}^F(T) = \left\{ \begin{matrix} \mathcal{C} \\ \downarrow \\ T \end{matrix} \uparrow s_1 \ldots \uparrow s_n \right\} \Big/ \text{iso}$$

secciones disjuntas

$\mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{C})$

$\shortparallel$

$\{(C, P_1, \ldots, P_n)\}/\text{iso}$

Argumento Clásico: (1980)

$$\begin{tikzcd}
G^1_d \simeq \mathcal{H}_{g,d} = \left\{ f: C \xrightarrow{d:1} \mathbb{P}^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \deg f = d \\ \text{ramificación} \\ \text{simple} \end{array} \right\}_{/\cong} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "h_{g,d}"] & \\
\mathcal{M}_g & \mathcal{M}_{0,2g-2+2d} / S_{2g-2+2d}
\end{tikzcd}$$

$$2g-2 = d(-2) + R$$

Riemann's Existence Thm:

$h_{g,d}$ es finito y sobre.

Pregunta Abierta: Formula para $h_{g,d}$.

φ es dominante si para $[C] \in \mathcal{M}_g$ general, $G^1_d(C) \neq \emptyset$

$\hookrightarrow \dim = \underbrace{g - (r+1)(g-d+r)}_{\rho}$ $r=1$

Sabemos que: $\rho \geq 0 \Longrightarrow G^r_d \neq \emptyset$

$[C] \in \mathcal{M}_g$ general $\Rightarrow \dim G^r_d = \rho$

En particular si $d > 0$ es tal que $\rho \geq 0$, entonces

$$\dim \mathcal{M}_g + (g - 2(g-d+1)) =$$

$$\dim \left(\mathcal{M}_{0,2g-2+2d} / S_m \right) = 2g-2+2d-3$$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_g = 3g-3.$$

<u>Argumento moderno</u>:

$$T_{[C]}\mathcal{M}_g = \mathrm{Hom}_{[C]}\left(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2), \mathcal{M}_g \right) =$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "flat"] & \text{deformación de primer orden} \arrow[d, leftrightarrow, "1 a 1"] \\
\operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) & H^1(C, T_C)
\end{tikzcd}$$

Por RR $h^0(2K_C) = 4g-4+1-g = 3g-3$.

Def: X variedad es

(1) Racional si $\mathbb{P}^{\dim X} \overset{\sim}{\dashrightarrow} X$

(2) Unirracional si $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ dominante

(3) Unireglada si $p \in X$ general existe $\mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ que pasa por p

$$\Updownarrow$$

$\exists\, Y$ $\dim Y = \dim X - 1$ irreducible tal que $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ dominante

Def: $\mathrm{Kod}(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$

$\qquad\qquad \shortparallel$

$\dim \Phi_{mK_X}(X)$ para $m \gg 0$.

(1), (2), o (3) $\Longrightarrow$ $\mathrm{Kod}(X) = -\infty$.

Si $\mathrm{Kod}(X) = \dim X$, X se dice de tipo general.

"Working with noncompact spaces is like trying to keep change with holes in your pockets"

Angelo Vistoli

($k = \mathbb{C}$)

<u>Def</u>: $p \in C$ se llama nodo si localmente en la ~~topología~~ topología analítica

$$U_p = \{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\mathcal{O}}_{C,p} \cong \mathbb{C}[\![x,y]\!]/(xy).$$

C se llama nodal si $\forall p \in C$, p es suave o un nodo.

<u>Def</u>: Una curva nodal se llama <u>estable</u> si $|\mathrm{Aut}(C)| < \infty$.

$(C, P_1, \ldots, P_n)$ estable si

$$|Aut(C, P_1, \ldots, P_n)| < \infty$$

(Asumimos $P_i \in C_{sm}$).

<u>Comentarios</u>: $g(C) = 1, 0$, C suave, C no es estable.

si $g \geq 2$ y C suave $\Rightarrow$ $|Aut(C)| \leq 84(g-1)$.

<u>C suave</u>: estable $\Leftrightarrow$ $2g-2+n > 0$

$\Leftrightarrow$ $\omega_C(P_1 + \ldots + P_n)$ es amplio.

$\Updownarrow$

estable

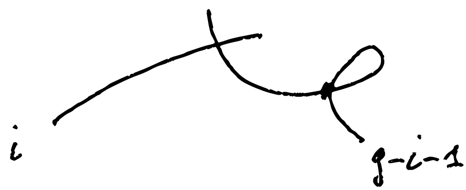
<u>Recuerdo</u>:

$p_g(C) = h^{1,0}(C) = h^0(C, \Omega_C^1)$

$p_a(C) = h^1(\mathcal{O}_C)$.

$p_a = p_g + \#$ nodos.

$$\overline{M}^F_{g,n}(T) = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{C} \\ {\scriptstyle \text{flat}} \downarrow \; \curvearrowright\sigma_1 \dots \curvearrowright\sigma_n \\ T \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} C_t \text{ estable} \\ p_a = g \\ \sigma_i(t) \in C_t^{sm} \text{ disjuntos} \end{array} \right\} \Big/ \text{iso}$$



$$\overline{M}_{g,n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} (C, p_1, \dots, p_n) \\ g(C) = g \end{array} \right\} \Big/ \text{iso}$$

<u>Severi</u> (1915) $\overline{M}_g$ es unirracional

($\mathbb{P}^N \dashrightarrow \overline{M}_g$) para $g \leq 10$.

en particular $\mathrm{Kod}(\overline{M}_g) = -\infty$ $\quad g \leq 10$.

<u>Thm</u> (Harris-Mumford 1982)

$\overline{M}_g$ es de tipo general para $g \geq 24$.

<u>Q</u>: $\mathrm{Kod}(\overline{M}_{g,n}) = ?$ <u>Foto</u>

$g^2_d \in G^2_d(C)$ general

$C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^2$ $\quad \varphi(C)$ es nodal

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}^2_d = \{ C \to \mathbb{P}^2 \text{ nodal} \arrow[dl] \arrow[dr, "\text{bir}"] & \\ \mathcal{M}_g & & N_\delta \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)| \end{tikzcd}$$

(1) $\rho(g,2,d) = g - 3(g-d+2) \geq 0$

$N_\delta = \{ \Gamma \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)| \mid \Gamma$ tiene δ nodos $\}$.

condición 2 $\quad \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)| - 3\delta \geq 0$ (2)

$p_g = g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$

(1) + (2) $\Longrightarrow$ $g \leq 10$. y $d \leq 9$

$(\mathbb{P}^2)^{\times \delta} \setminus \Delta \dashrightarrow \mathcal{M}_g$ <u>unirracional</u>.

ejercicio: Encontrar una parametrización unirracional de $\mathcal{M}_3$ y $\mathcal{M}_4$

Thm 1: $g \geq 2$, $|K_C|$ es libre de puntos base

Thm 2: $g \geq 2$, $|K_C|$ es muy amplio ssi C no es hyperelíptica.

---

g = 3: C gral $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ con grado 4

y toda curva suave plana de grado 4 tiene género 3 y está canónicamente incrustada.

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| \cong \mathbb{P}^{14} \dashrightarrow \mathcal{M}_3 .$$