Followup

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ variedad tórica

$T = \{[1 : t_1 : \dots : t_n] \mid t_i \in \mathbb{C}^*\}$

$\hookrightarrow$ $n+1$ divisores T-invariantes

$[* : \cdots : 0 : * \cdots : *]$

↳ $n+1$ puntos T-invariantes

Las secciones (todas, serie completa) globales de $\mathcal{O}(m)$ corresponden a un politopo.

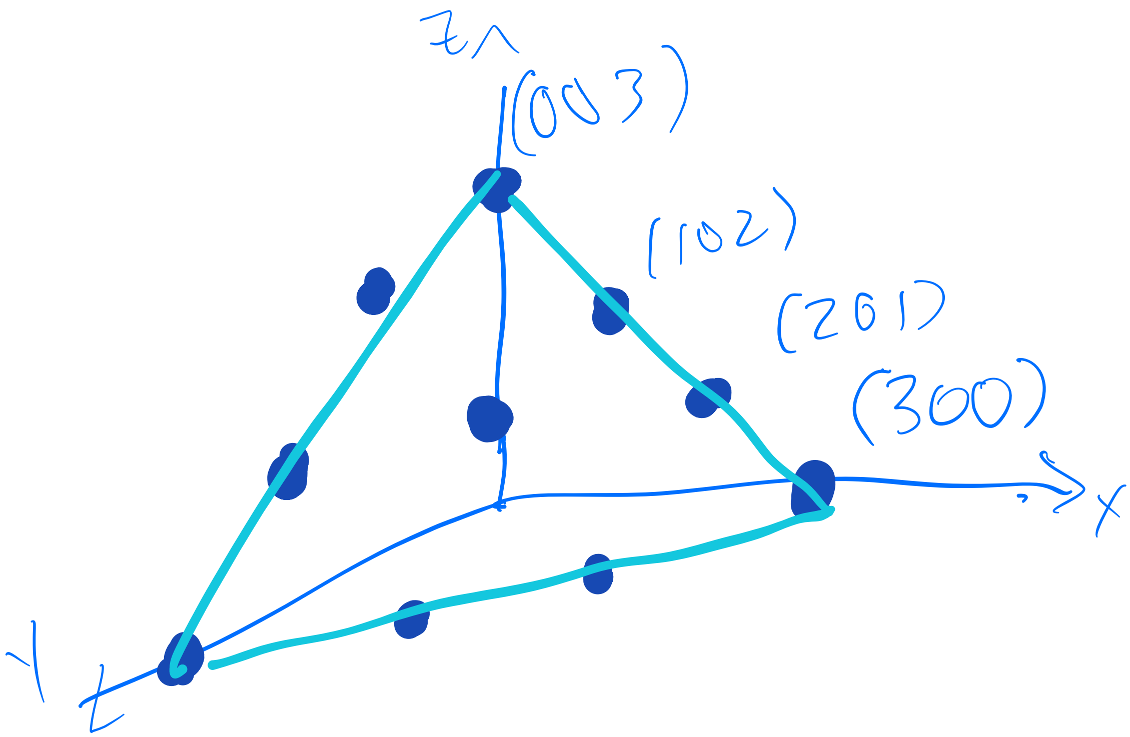
<u>base:</u> X^a, $|a| = m$

todos los monomios de grado m

<u>Ejemplo</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$

$\{X^3, Y^3, Z^3, X^2Y, X^2Z, Y^2X, Y^2Z, Z^2X, Z^2Y, XYZ\}$

Politopo



Veronese

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^9$$

I binomial, generado por quadrics

resolución libre

$$\begin{array}{ccccccccc}
R^{189} & \to & R^{105} & \longrightarrow & R^{27} & \to & I & \to & 0 \\
\uparrow & & & & & & & & \\
R^{189} & \leftarrow & R^{105} & \leftarrow & R^{27} & \leftarrow & R & \leftarrow & 0
\end{array}$$

es lineal hasta
el último
pedazo

Conjetura Ottaviani
(2001) Paoletti

Veronese(n,d) tiene
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ resolución
lineal hasta $3d-3$
y luego se rompe.

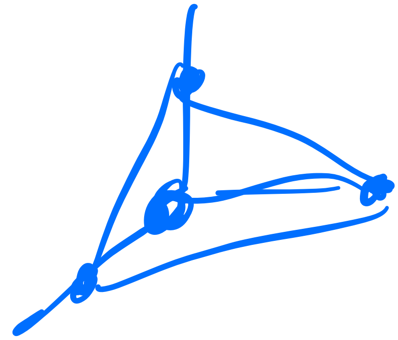
ejemplo anterior
veronese (2, 3) fue
lineal hasta 6.

(2014) Thanh Vu
$d=3$ ✓

- X tórica
- $\{D_1, \ldots, D_m\}$ div T-inv

$$\boxed{K_X = -\sum_{i=1}^{m} D_i}$$

Ejemplo



$$\operatorname{conv}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq x \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} \leq 1 \right\}$$

$$T(a, b, c)$$

Variedad tórica

$\mathbb{P}(a,b,c,1)$

'weighted' projective space

Cuando tiene

Singularidades canónicas

Kasprzyk

(y hay criterio concreto)

X dim 3 Sing Canon.

$$\chi(\mathcal{O}_X(mK_X)) = (1-2m)\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{12}m(m-1)(2m-1)K^3$$
$$+\sum_Q \left\{ \frac{(r^2-1)}{12r}(m-\overline{m}) + \sum_{j=0}^{\overline{m}-1} \frac{\overline{bj}(r-\overline{bj})}{2r} \right\},$$

where the sum takes place over the basket of singularities for X.

Miles Reid (Preguntar a Pedro)

Hoy

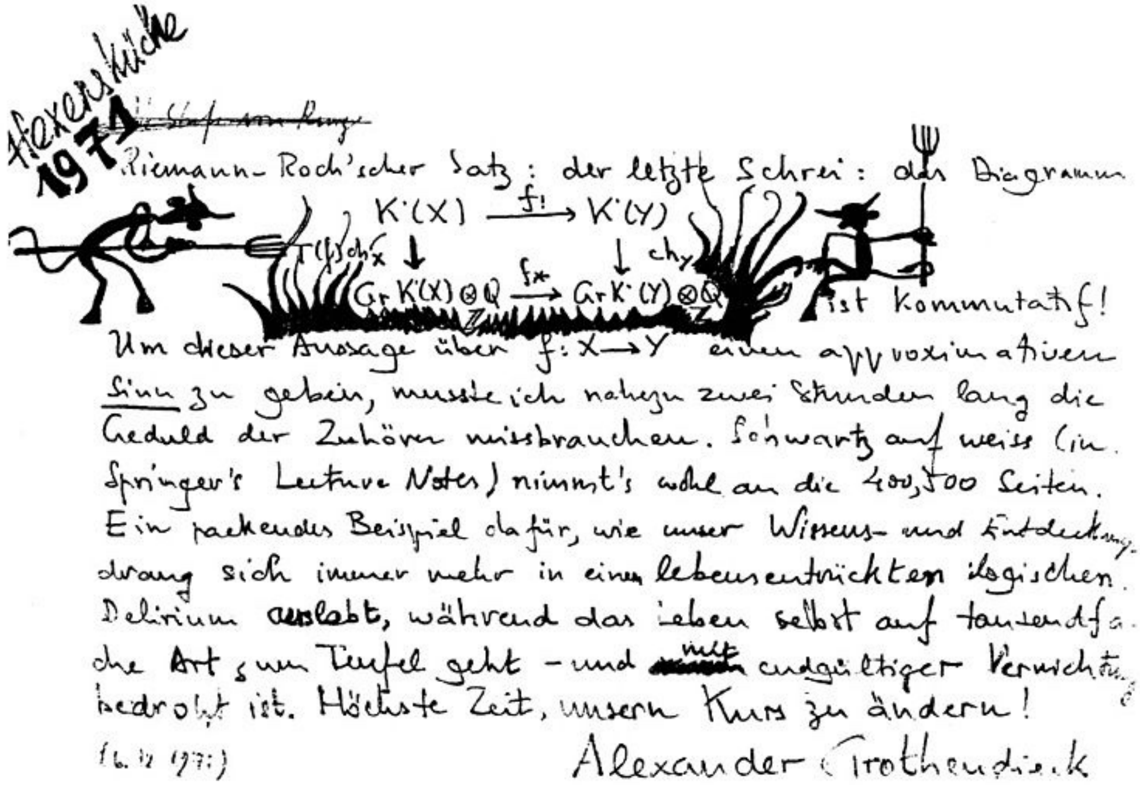
P politopo en $\mathbb{R}^n$
reticular

X variedad tórica

$$X(D_P) = \mathbb{P}^n \mathbb{Z}^n$$

queremos saber
mas sobre
la izquierda.

Grothendieck
- Hirzbruch - Riemman
- Roch



Hexenküche 1971

Riemann-Roch'scher Satz: der letzte Schrei: das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^{\cdot}(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[d, "T(f)ch_X"'] & K^{\cdot}(Y) \arrow[d, "ch_Y"] \\ Gr\,K^{\cdot}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[r, "f_*"] & Gr\,K^{\cdot}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ!

Um dieser Aussage über $f: X \to Y$ einen approximativen Sinn zu geben, musste ich nahezu zwei Stunden lang die Geduld der Zuhörer missbrauchen. Schwarz auf weiss (in Springer's Lecture Notes) nimmt's wohl an die 400, 500 Seiten. Ein packendes Beispiel dafür, wie unser Wissens- und Entdeckungsdrang sich immer mehr in einem lebensentrückten logischen Delirium auslebt, während das Leben selbst auf tausendfache Art zum Teufel geht – und mit endgültiger Vernichtung bedroht ist. Höchste Zeit, unsern Kurs zu ändern!

(6.12.1971)

Alexander Grothendieck

Un repaso de contexto

Grothendieck
anillo

$K(X)$: $X/_{\mathbb{C}}$ suave

elementos $[F]$ haz vectorial

relacion $0 \to F \to G \to H \to 0$

$CH] = [G] - [F]$

* técnicamente $K(X)$ tiene haces coherentes pero...

Euler characteristic

$$\chi : K(X) \to \mathbb{Z}$$

Chow ring $A(X)$

$X/\mathbb{C}$ suave

$$A(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(X)$$

subvars co dim k

Relacion Chern!

$$K(X) \xrightarrow{\text{chern}} A(X)$$

Haz vectorial $\longrightarrow$ Subvariedades

Teorema

$$\chi(V) = \left[ch(V) \cdot td(X) \right]_n$$

$$td(X) = td(T_X)$$

haz tangente

Friedrich Hirzebruch
'prospects in mathematics'

$X = \mathbb{P}^n$, $A(X) = \frac{\mathbb{Z}[x]}{x^{n+1}}$

$\mathcal{O}_X$ haz trivial

$\boxed{x = H}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hartshorne Thm 8.13} \\ 0 \to T_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to 0\end{array}}$$

$$td(T_{\mathbb{P}^n}) = td(\mathcal{O}(-1))^{n+1}$$

$\in A(\mathbb{P}^n)$

* $\nexists$ H quere

$$td(E_1 + E_2) = td E_1 \cdot td E_2$$

$$\chi(O_x) = 1$$

$$\parallel$$

$$\left(1 \cdot F(x)^{n+1}\right)_n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\text{Necesitamos}}\,! \\ [x^n]F(x)^{n+1} = 1\end{array}}$$

M. Aguiar
F. Ardila

combinatoria

↳ Lagrange Inversion

única solución

$$F(X) = \frac{X}{1-e^{-X}}$$

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Aparece Bernouilli

Verificando el teorema

$V = \mathcal{O}(m) \qquad \mathbb{P}^n$

$$ch(V) = e^{mx} \in A(\mathbb{P}^n)$$

$$\chi(\mathcal{O}(m)) = \binom{m+n}{m}$$

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^3}{3!}x^3 + \dots$$

$$[x^n]\ \frac{e^{mx}\cdot x^{n+1}}{(1-e^{-x})^{n+1}} = ?$$

idea de calculo complejo: residuo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{mx}}{(1-e^{-x})^{n+1}}\,dx$$

$1-e^{-x} = y,$ $\quad \frac{1}{(1-y)^2}\,dy = e^{x}dx$

$$\frac{1}{1-y} = e^x,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{((1-y))^{m-1}} \cdot \frac{1}{y^{n+1}} \frac{1}{(1-y)^2}\, dy$$

$$[y^n]\,(1-y)^{-m-1}$$

$$(-1)^n \binom{-m-1}{n} = \binom{m+n}{n}$$

Aplicación

P politopo

D_P divisor

X variedad tórica (suave)

$\{D_1, \dots, D_m\}$ divisores tóricos

$$A_{\mathbb{Q}}(X) = \frac{\mathbb{Q}[D_1, \dots, D_m]}{\langle \text{sectios de } FU H \rangle}$$

Fulton Sección 4.3

$$\boxed{0 \to \Omega^1 \to \mathcal{O} \to \bigoplus_{i}^{m} \mathcal{O}_{D_i} \to 0}$$

$$0 \to \mathcal{O}(-D_i) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{D_i} \to 0$$

$$td(T_X) = \prod_{i=1}^{m} \frac{D_i}{1-e^{-D_i}}$$

$$ch(D_p) = e^{D_p}$$

$$\mathrm{ch}(D) = e^{D} = 1 + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots$$

$$\chi(D_P) = |P \cap \mathbb{Z}^n|$$

$$\left[e^{D_p} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{D_i}{1-e^{-D_i}} \right]_n$$

J. Pommersheim

(2021)

$$D_1^3 D_2^2 D_3 D_4^7$$

$D_1^4 \longrightarrow$ square free

$D_1 D_2 D_3 D_4$

$+ \ldots$

D_P P politipe

$$D_P = \sum_{i=1}^{m} a_i D_i$$

$$\chi(tD) = \frac{D^n}{n!}t^n + O(t^{n-1})$$

$n!$

$? + t^{n-2}$

$? + t^{n-3}$

$+ \dots + 1$