Día 1

Curvas planas

4-1-2021

Sea k un cuerpo arbitrario.

Sea $\mathbb{A}^2_k := \{(x,y) : x,y \in k\} = k^2$ el plano afín.

§1. Curvas afines.

Dado $f(x,y) \in k[x,y]$ no constante, el conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_k : f(x,y) = 0\}$$

será para nosotros una <u>curva plana</u> afín.

(Esencialmente le llamamos curva porque depende de un parámetro en k: Si fijamos una coordenada, la otra queda determinada salvo finitas opciones.)

El <u>grado</u> de C es el grado de $f(x,y)$.

<u>Ej</u>.- Si k es finito (e.g. $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo), entonces C es finito. Incluso si k es infinito (e.g. $k = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) la curva C puede ser un

conjunto finito o vacío (eg. $x^2+y^2+1=0$).

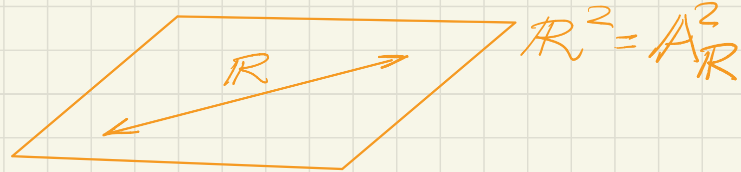
ver ejercicio 1.1

Pero si $k=\bar{k}$ (se puede mostrar que) C es un conj. infinito de puntos de $\mathbb{A}^2_k$.

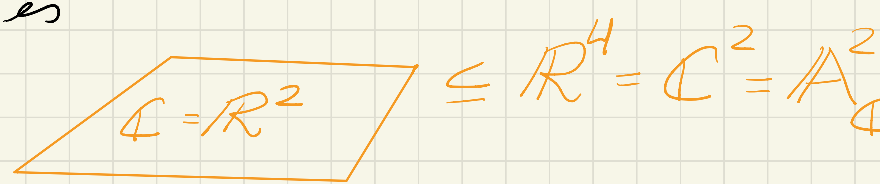
Ej 1.- El gráfico de la función $\operatorname{sen}(x)$ no es curva plana en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
ver más en la guía

Ej 2.- Una recta es $\{ax+by+c=0\}$ para $a,b\in k$ no ambos cero. Su curva es literalmente una copia de k despejando una variable.

Si $k=\mathbb{R}$, entonces es

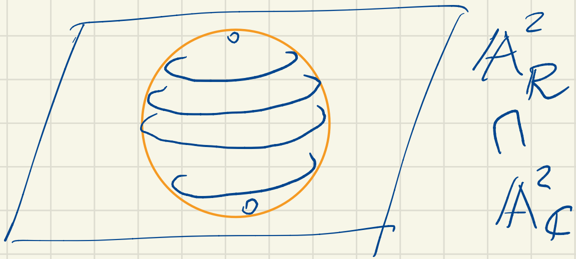


Si $k=\mathbb{C}$, entonces es

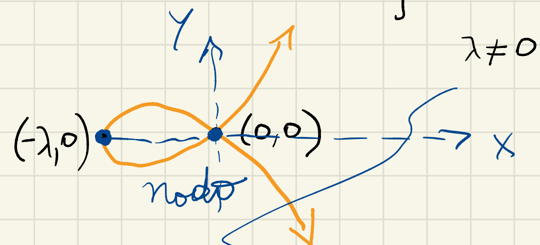


Ej 1. Incluso cuando hablemos sobre $k = \mathbb{C}$, se dibujará su «parte real» o alguna figura que represente algún «dato geométrico» en general.

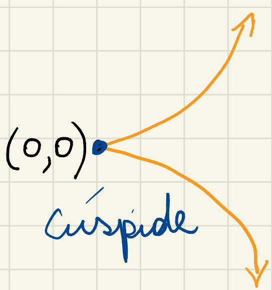
$$\{x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$



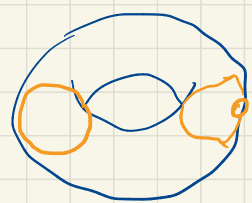
$$\{y^2 = x^2(x+\lambda)\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

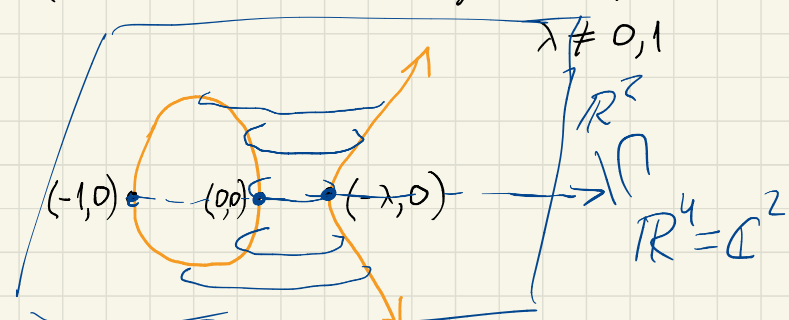


$$\{y^2 = x^3\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \quad (\lambda = 0)$$



$$\{y^2 = x(x+1)(x+\lambda)\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

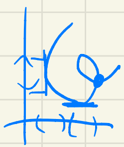




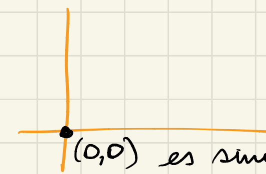
§2. Singularidades. Digamos que $k=\overline{k}$.

Dada una curva plana $C=\{f(x,y)=0\}$, un punto $P\in C$ es <u>singular</u> si $f_x(P)=0$ y $f_y(P)=0$.

Ej/ $f(x,y)=y^2-x^3 \Rightarrow f_y=2y \quad f_x=-3x^2$
$\Rightarrow (0,0)$ es su único punto singular.



Ej/ $f(x,y)=x\cdot y \Rightarrow f_y=x \quad f_y=y \Rightarrow$



(0,0) es singular

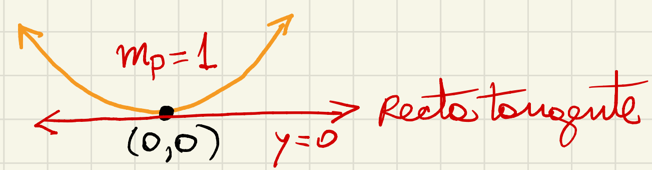
Def: Un <u>cambio de coordenadas</u> $T:\mathbb{A}^2_k\longrightarrow\mathbb{A}^2_k$ es
$T(x,y)=(ax+by+e,\ cx+dy+f)$ con $a,b,c,d,e,f\in k$
y $ad-bc\neq 0$.

Notar que la imagen de una curva plana bajo un cambio de coordenadas es otra curva plana, esencialmente equivalente a la primera.

$$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{2} + \underbrace{x^3y}_{4} + \boxed{\cancel{x+y}}_{1} + \underbrace{y^7}_{7} \Rightarrow m_{(0,0)} = 1$$

Def: Sea $C = \{ f(x,y) = 0 \}$ curva plana y $P \in C$. Sea $T : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ cambio de coordenadas tal que $T(P) = (0,0)$. La multiplicidad de P (m_P) es el menor grado entre los monomios del polinomio que define a $T(C)$. Las rectas tangentes en P es la pre-imagen por T de la curva definida por ese ~~monomio~~ polinomio hom. de grado menor.

Ej1.- $\{ y = x^2 \} \ni (0,0) = P$

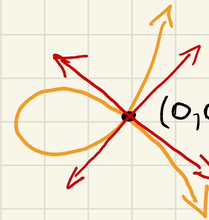


Ej.- (Tarea) Si $P \in C = \{ f(x,y) = 0 \}$ es punto nosingular, entonces la recta tangente es $\{ f_x(P)(x-a) + f_y(P)(y-b) = 0 \}$

donde $P = (a,b)$.

<u>Ejl</u>.- $\{ y^2 = x^2(x+1) \} \ni (0,0)$

$\underbrace{y^2 - x^2} - x^3 = 0$



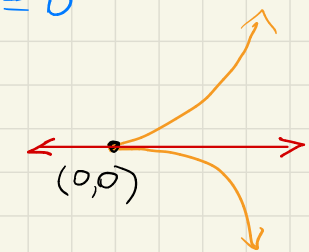
$y^2 - x^2 = 0$

$(y-x)(y+x)$

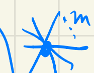
$m_{(0,0)} = 2$

y para $\{ y^2 = x^3 \}$

$y^2 = 0$



$m_{(0,0)} = 2$



Una sing. $m_p = m$ es simple si produce m rectas tang. diferentes

§3. Intersección. Digamos $k = \overline{k}$.

<u>Teorema</u>: Sean $f, f' \in k[x,y]$ sin factores comunes, no constantes. Entonces

$$\#\big(\{ f(x,y) = 0 \} \cap \{ f'(x,y) = 0 \} \big) \text{ es finito.}$$

Demostración: (advertencia: se usará algo de álgebra)

Considerar $f(x,y), f'(x,y) \in k(x)[y]$ donde siguen siendo coprimos por el Lema de Gauss, pero ahora $k(x)[y]$ es dominio Euclidiano y así $\exists A(x,y), B(x,y)$ en $k(x)[y]$ tales que

$$A(x,y) f(x,y) + B(x,y) f'(x,y) = 1 .$$

Multiplicar por los denominadores (en $k[x]$) para así obtener:

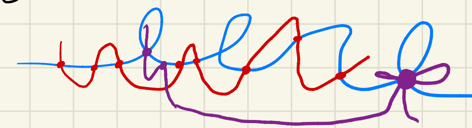
$$a(x,y)\cdot f(x,y) + b(x,y)\cdot f'(x,y) = c(x) \in k[x]$$

donde $a, b \in k[x,y]$. Luego existen finitos x comunes a $f(x,y)=0$ y $f'(x,y) = 0$.

Hacer lo mismo con y. $\blacksquare$

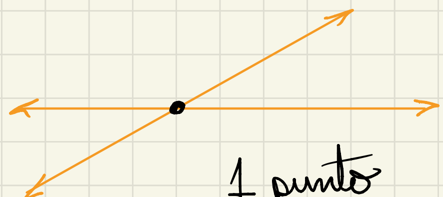
Obs: Por supuesto al tener un factor común no constante tenemos infinitos puntos en común.

Cor: (Teorema) El número de puntos singulares en una curva plana irreducible es finito.

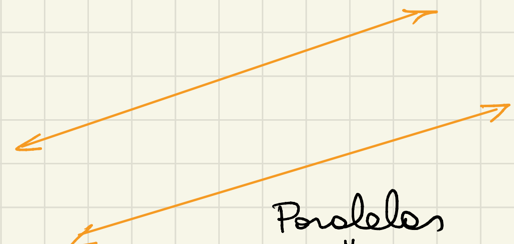


Dados C, C' sin factores comunes ¿Cómo encontrar $C \cap C'$?

Ejl.- Dos rectas

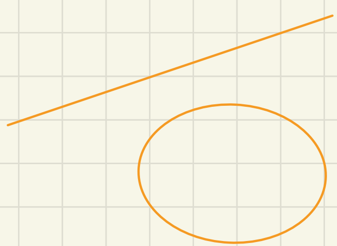


1 punto

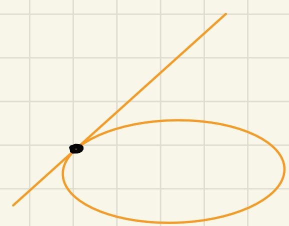


Paralelas
||
no intersectan

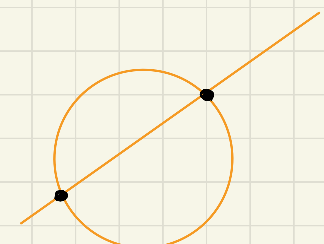
Ejl.- Recta y cónica



PARALELAS

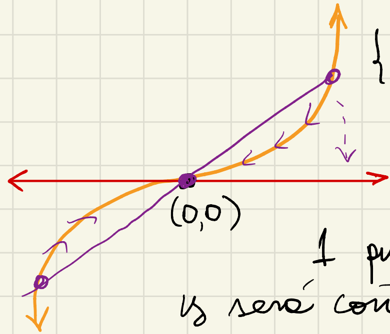


1 punto
(pero doble?)

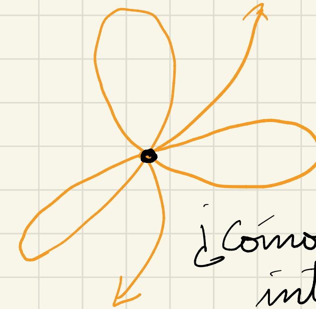


2 puntos

Ej 1.



1 punto
↳ será contado triple



¿Cómo contar intersección?!

Def: $$C \cap C' = \sum_{P\in C\cap C'} I(P, C\cap C')$$ [Contando multiplicidades!]

Teorema: Existe un único <u>número de intersección</u> $I(P, C\cap C')$ el cual satisface axiomas (1)–(7). En efecto, tenemos
$$I(P,C\cap C') = \dim_k \left(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2_k)/(f,f') \right).$$
dim como k esp. vectorial

[El teorema y los 7 axiomas en [Fulton] 3.3]

De hecho, $C \cap C' = \dim_k k[x,y]/(f,f')$.

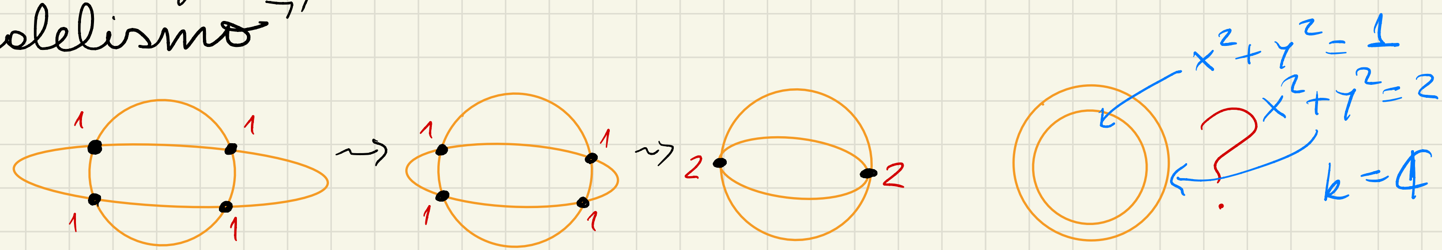
Ejl.- $C = \{y = x^n\}$, $C' = \{y = 0\}$

$\Rightarrow C \cap C' = I((0,0), C \cap C') = \dim_k k[x,y]/(y-x^n, y)$

$\Rightarrow C \cap C' = \dim_k k[x]/x^n = n$

[Más propiedades y otros cálculos en [Fulton] y en la guía]

Algo que falla con intersecciones en $\mathbb{A}^2_k$ es el "paralelismo"



STOP!

94 $\mathbb{P}^2_k$ y curvas proyectivas.

El truco para recuperar los "puntos perdidos" será "agrandar" "compactificar" el plano afín $\mathbb{A}^2_k$ con una recta en el infinito.

gr	pol.
1	$ax+by+cz$
2	$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz$

$$\text{Plano proyectivo} = \mathbb{A}^2_k \cup \text{recta en el infinito}$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}^2_k := \left\{ [x,y,z] : \begin{matrix} x,y,z\in k \\ \text{no todos cero} \end{matrix} \right\} \Big/ \begin{matrix}[x,y,z]=[x',y',z'] \text{ ssi} \\ \exists \lambda\in k\setminus\{0\} \; x=\lambda x,\ y=\lambda y,\ z=\lambda z\end{matrix}$$

$$\cup$$

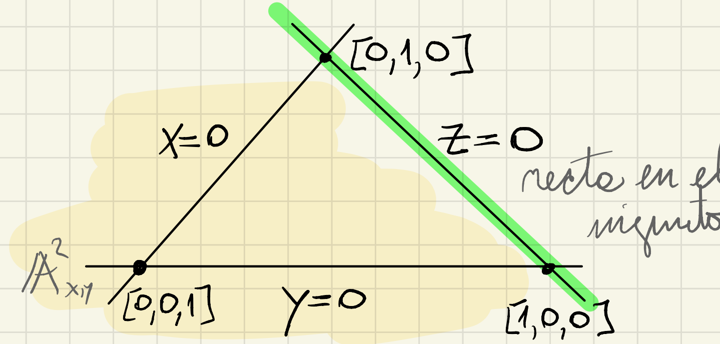
$$C = \{[x,y,z]\in\mathbb{P}^2_k : F(x,y,z)=0\} \text{ con } F(x,y,z) \text{ pol. homogeneo}$$

curva plana proyectiva

$$F(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^d F(x,y,z)$$

$d \rightsquigarrow$ grado de F

¿Cómo me imagino $\mathbb{P}^2_k$?

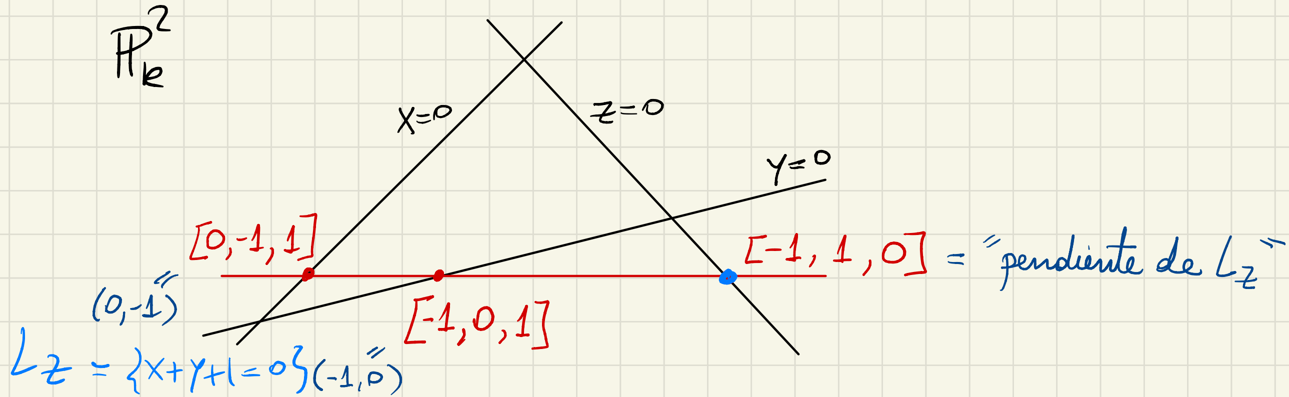


Notar que $\mathcal{U}_Z = \{[X,Y,Z] \text{ con } Z \neq 0\} = \{(x,y) \text{ con } x,y \in k\} = \mathbb{A}^2_k$.

Luego $\mathbb{P}^2_k = \mathcal{U}_Z \cup \{Z=0\} = \mathbb{A}^2_k \cup$ recta en el infinito

Y análogo con $\mathcal{U}_X = \{X \neq 0\} = \mathbb{A}^2_k$ y $\mathcal{U}_Y = \{Y \neq 0\} = \mathbb{A}^2_k$, lo que muestra a $\mathbb{P}^2_k$ como la unión de 3 copias de $\mathbb{A}^2_k$.

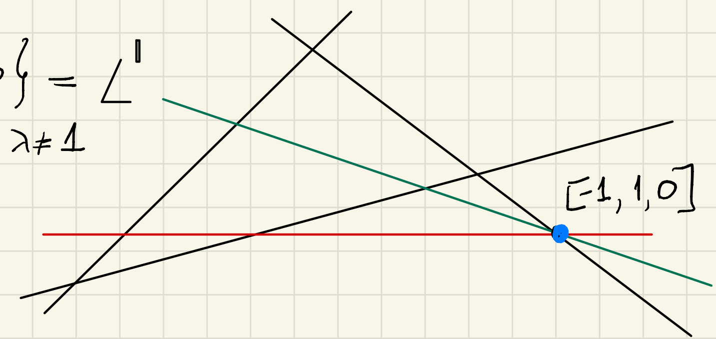
Ej: visualizar la recta $L = \{x+y+z=0\}$



Vista como recta en $\mathcal{U}_z = \mathbb{A}^2$: $\{x+y+1=0\} = L_z$

$\{x+y+\lambda z=0\} = L'$
$\lambda \neq 1$

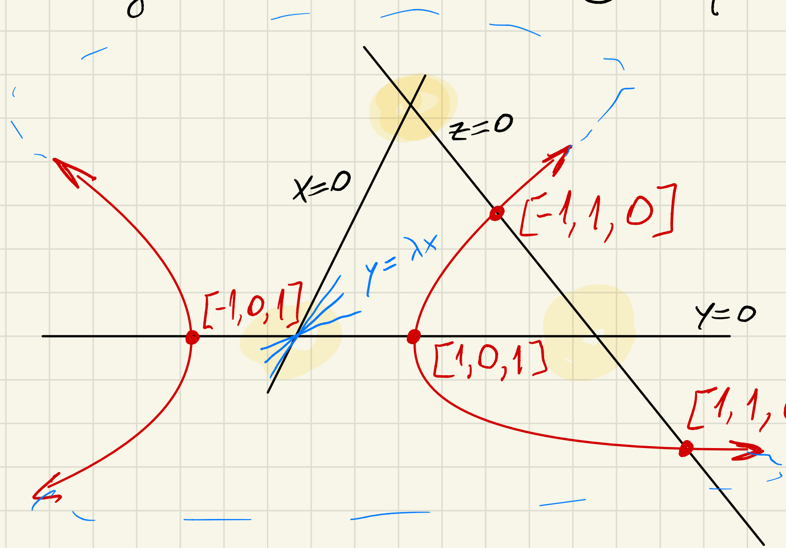
$\{x+y+z=0\} = L$



Así L y L' son paralelas en $\mathcal{U}_z$ PERO <u>no</u> lo son en $\mathbb{P}^2$.

(Tarea: Dos rectas distintas en $\mathbb{P}^2_k$ se intersectan en 1 punto.)

Ej]. Visualizar la cónica $C = \{x^2 - y^2 = z^2\}$



Luego,

en $\mathcal{U}_z$ es hipérbola

en $\mathcal{U}_y$ es hipérbola

en $\mathcal{U}_x$ es circunferencia.

[Mono Real!]

Por ejemplo, toda recta $\{y = \lambda x\}$ intersecta a C:

$$x^2(1-\lambda^2) = z^2$$

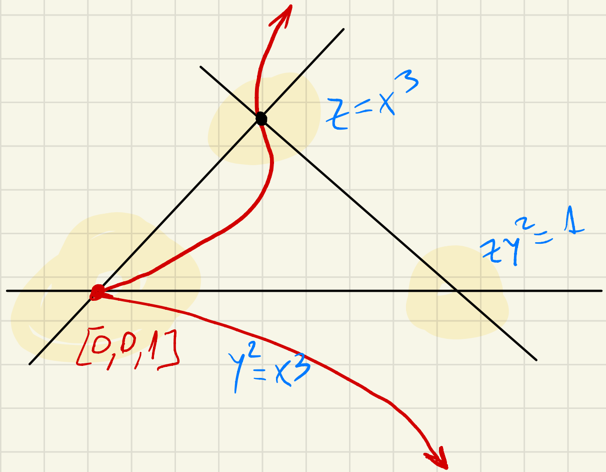
$\Rightarrow$ $\lambda \in \,]-1,1[$ nos da 2 puntos reales

$\lambda = \pm 1$ nos da 1 punto en el infinito (mult $= 2$)

$\lambda \notin [-1,1]$ nos da 2 puntos complejos

Ejbr Visualizar la cúbica $E=\{zy^2=x^3\}$

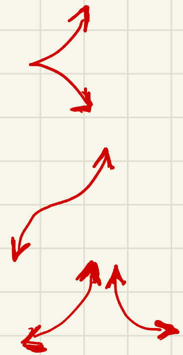
$\mathbb{P}^2$



$U_z : \{y^2=x^3\}$

$U_y : \{z=x^3\}$

$U_x : \{zy^2=1\}$



Luego intersectar con $\{x=0\}$ $\bullet^2$ $\bullet^1$

" con $\{y=0\}$ $\bullet^3$

" con $\{z=0\}$ $\bullet^3$

Tarea : $C=\{F_d(x,y,z)=0\}$, L recta no factor de C $\Rightarrow |C\cap L|=d$ contando multiplicidades.

Tarea guía : Verificar que toda intersección entre cónicas es posible.

Teorema de Bézout : $(k = \overline{k})$

Si C y D son dos curvas proyectivas planas sin factores comunes, entonces

$$|C \cap D| = \sum_{P \in C \cap D} I(P, C \cap D) = \text{grado}(C) \cdot \text{grado}(D).$$

Demostración : Está desarrollado en [Fulton] §5.3 .

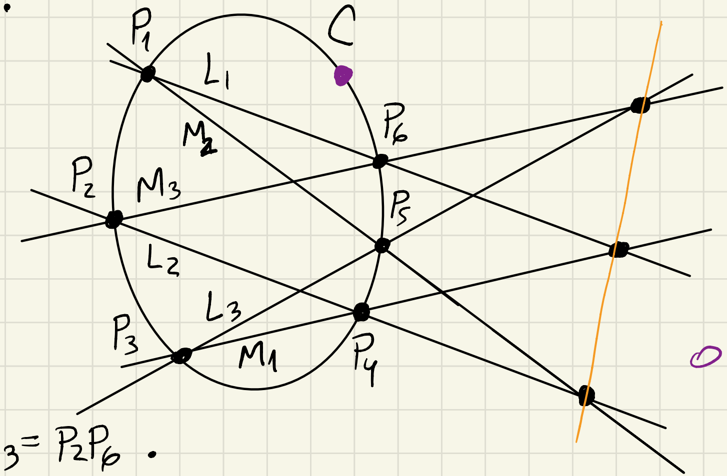
Para terminar, miraremos una simple aplicación la cual resulta en una configuración especial entre una cónica y 7 rectas...

Teorema de Pascal:

$C =$ cónica irreducible

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in C$

Sean $L_1 = P_1P_6$, $L_2 = P_2P_4$, $L_3 = P_3P_5$, $M_1 = P_3P_4$, $M_2 = P_1P_5$, $M_3 = P_2P_6$.



$0 = L_1(P)L_2(P)\overset{\neq 0}{L_3(P)} + \lambda \overset{\neq 0}{M_1M_2M_3(P)}$

$\lambda = \dfrac{-L_1L_2L_3}{M_1M_2M_3}(P)$

Entonces $L_1 \cap M_1$, $L_2 \cap M_2$, $L_3 \cap M_3$ son colineales.

Demostración: Definir la cúbica $E_\lambda = \{ L_1L_2L_3 + \lambda M_1M_2M_3 = 0 \}$.

Elegir $P \in C$ tal que $P \neq P_i \ \forall i$, luego elegir λ tal que $P \in E_\lambda$.

Luego $|C \cap E_\lambda| \geq 7 \Rightarrow$ (Bézout) $C \mid E_\lambda$ ya que C irreducible.

Luego $E_\lambda = C \cdot L$ donde grado de L es 1 (ie es una recta)

Como $L_i \cap M_i \notin C$ pero $\in E_\lambda \Rightarrow \in L$, ie, son colineales ■

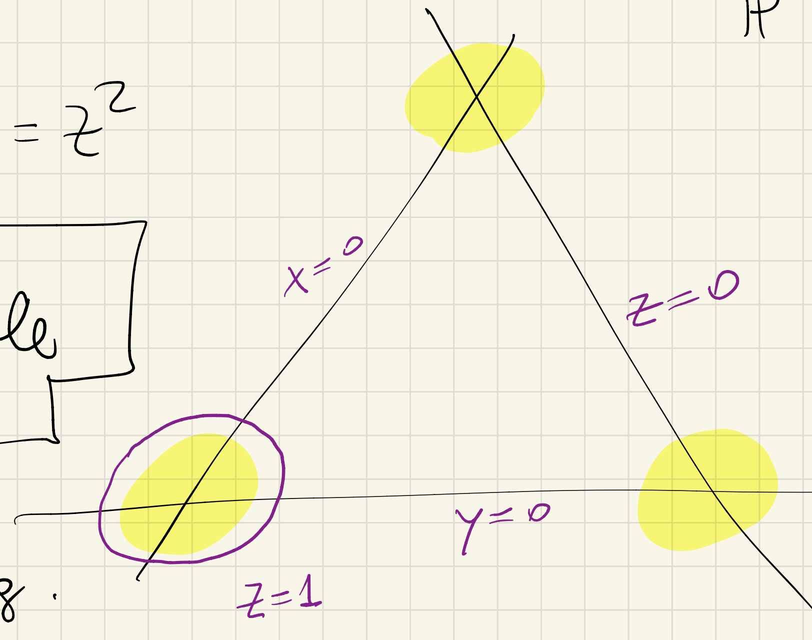
$\mathbb{P}^2$

Construcción del del plano de Fano

$\mathbb{P}^2_k$

$\mathrm{char}(k) = 2$

$$x^2 + y^2 = z^2$$



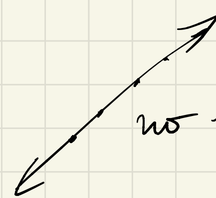
$\boxed{f \text{ irreducible}, \; k = \bar{k}}$

$\Downarrow$

$\{f = 0\}$ tiene puntos 0 sing.

$$1$$

$$f = f_1 \cdots f_n \qquad \alpha_1 \; \ldots \; \alpha_n \qquad \{x = 0\}$$



no hay sing.

$$f = x^{2} = 0 \qquad f_x = 2x = 0$$