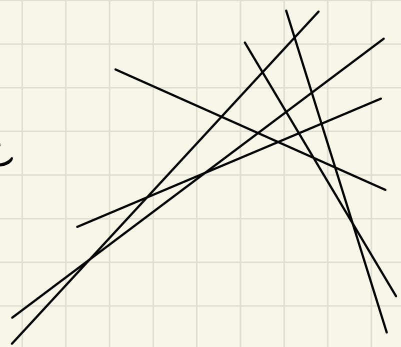
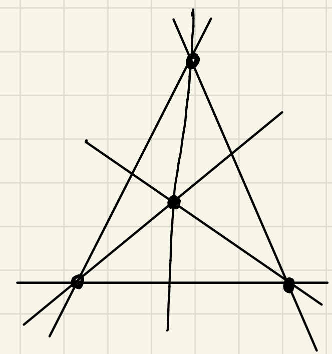
Día 2

Configuraciones de curvas

5 - 1 - 21

Este cursillo es sobre configuraciones de curvas irreducibles planas, donde la atención se centra en intersecciones especiales.

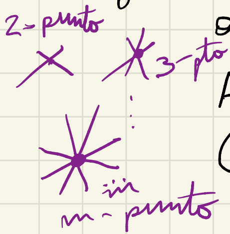
de  a  o más especial.

Nos concentraremos en configuraciones de curvas suaves con cruces simples. Más específico CÓNICAS y RECTAS.

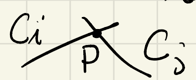
Obs1 : Configuración de curvas racionales (ie las parametrizables) tienen un montón de aplicaciones y me interesan mucho en caso que alguien se lo esté preguntando.

<u>obs2</u>: Ya para cónicas no hay mucho escrito, con rectas les puedo contar una historia larga que ya dejó <u>preguntas abiertas</u>.

<u>Def</u>.- Una configuración de curvas es una colección finita de curvas nosingulares proyectivas $\{C_1, \dots, C_d\}$.



Asumiremos cruces simples: Dado $P \in C_i \cap C_j \Rightarrow I(P, C_i \cap C_j) = 1$

(es decir, 

). (ie solo <u>puntos simples</u> singulares)

<u>Def</u>.- Sea $A = \{C_1, \dots, C_d\}$ una configuración. Para $m \geq 2$, un <u>m-punto</u> es un punto que pertenece a exactamente m curvas en A. Denotamos por $t_m = \#\{m\text{-puntos en } A\}$.

<u>Def</u>.- Dos configuraciones A, A' son <u>equivalentes</u> si existe cambio de coordenadas $T: \mathbb{P}^2_k \longrightarrow \mathbb{P}^2_k$ $\left(T[x,y,z] = M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ con } M_{3\times 3} \text{ invertible} \right)$ tal que $T(A) = A'$.

Declaramos como invariantes numéricos muy importantes los siguientes números de Chern:

$$\mathbb{Z} \ni \bar{c}_1^2(A) := 9 - \sum_{i=1}^{d} \text{grado}(C_i)^2 + \sum_{m \geq 2} (3m-4) t_m + 4 \sum_{i=1}^{d} (g(C_i)-1)$$

$$\mathbb{Z} \ni \bar{c}_2(A) := 3 + \sum_{m \geq 2} (m-1) t_m + 2 \sum_{i=1}^{d} (g(C_i)-1)$$

donde $g(C_i) := \dfrac{(\text{grado}(C_i)-1)(\text{grado}(C_i)-2)}{2}$ (género de C_i!)

[obs1: Hay una justificación para el nombre que pasa por las clases de Chern de $\Omega^1_X(\log D)$ (haz de 1-diferenciales racionales con a lo más polos simples en D) donde $X = Bl_{\substack{m\text{-puntos} \\ m \geq 3}}(\mathbb{P}^2_k)$ y D = transformada total reducida de la configuración.]

[obs 2: La idea es que estos invariantes $\bar{c}_1^2, \bar{c}_2$ representan una "etiqueta" para el "espacio de moduli" de configuraciones con grados, d, e intersección fija. Parecido al espacio de moduli de curvas de género g, donde g es el "único" número de Chern.]

- En lo que resta de la clase de hoy miraremos diversas configuraciones y calcularemos números.
- De ahora en adelante sólo cónicas y rectas:

Si $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_{d_1}, C_1, \dots, C_{d_2}\}$, entonces

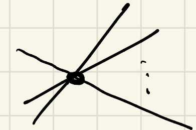
$$\bar{c}_1^2 = 9 - 5d_1 - 8d_2 + \sum_{m \geq 2} (3m-4) t_m$$

$$\bar{c}_2 = 3 - 2d_1 - 2d_2 + \sum_{m \geq 2} (m-1) t_m$$

¡Para $d_2 \neq 0$ mirar guía, sólo miraré una configuración especial!

Así $d_1 = d$, k cuerpo cualquiera

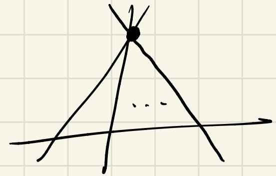
Ej] Configuración trivial de rectas



$t_d = 1$ $\quad \bar{C}_1^2 = 5-2d$

$\bar{C}_2 = 2-d$

y casi trivial



$t_{d-1} = 1$, $t_2 = d-1$. $\quad \bar{C}_1^2 = 0$

$\bar{C}_2 = 0$

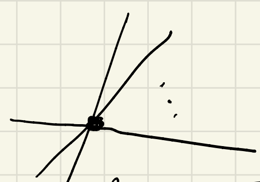
Ej]- Configuración genérica de d rectas es tal que $t_2 = \binom{d}{2}$.

$$\bar{C}_1^2 = \left(\frac{2d-6}{d-2}\right)\bar{C}_2 > 0 \text{ si } d \geq 4$$

<u>Lema</u>: $\binom{d}{2} = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} t_m$ para toda $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_d\}$.

<u>Demostración</u>: Contar pares de rectas de dos formas distintas.

Restricción combinatorial independiente de k



m-punto

$\binom{m}{2}$ pares

∎

Ej.- Lo más especial posible : configuraciones plano proy. finito.

Sea $k = \mathbb{F}_{p^n}$ algún primo p, $n>0$. $\mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \cup \{z=0\}$

Notar que en $\mathbb{P}^2_k$ tenemos $(p^n)^2 + p^n + 1$ puntos, y así el mismo número de rectas. Cada recta contiene p^n+1 puntos, y así cada punto está en p^n+1 rectas

$\mathbb{P}^1_k = \{[x,y]\} = \mathbb{A}^1_k \cup \text{pto}$

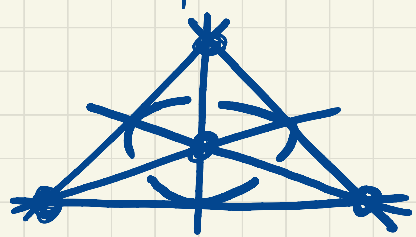
$(p^n)^2 + p^n + 1$

$\therefore$ tenemos configuración de $(p^n)^2 + p^n + 1$ rectas con
$t_{p^n+1} = (p^n)^2 + p^n + 1$, $t_m = 0$ $m \neq p^n+1$.

Ejemplo más pequeño: El plano de Fano con 7 rectas y $t_3 = 7$.

$2^2+2+1 = 7$ rectas

$t_3 = 7$



$\bar{C}_1^2 = 9$, $\bar{C}_2 = 3$

justificaremos mañana porqué estas configuraciones son las más especiales posibles: $\bar{C}_1^2 = 3\bar{C}_2 > 0$

Ej)- Configuraciones de Ceva en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$x^n - y^n = \prod_{j=1}^{n} \left(x - e^{\frac{2\pi i j}{n}} y\right)$

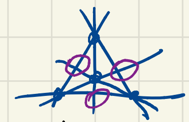
$Ceva_n := \{(x^n-y^n)(x^n-z^n)(y^n-z^n) = 0\}$

$n \ast [0,0,1]$ $\quad n \ast [0,1,0]$ $\quad n \ast [1,0,0]$

tiene $d = 3n$ rectas y $t_3 = n^2$, $t_n = 3$.

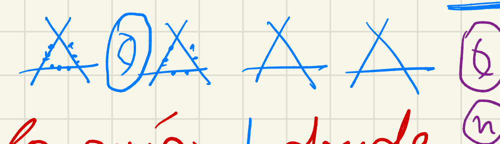
$\bar{C}_1^2 = 5n^2 - 6n - 3$ $\qquad \bar{C}_2 = 2n^2 - 3n$ $\qquad \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\frac{(n-2)}{n(2n-3)} = \frac{\bar{C}_1^2}{\bar{C}_2} = 3 - \frac{n^2-3n+3}{n(2n-3)}$

- $ceva_2$ es el cuadrilátero completo

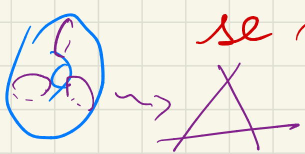


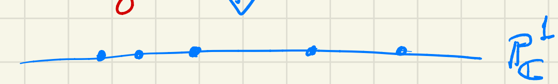
- $ceva_3$ es la configuración dual de Hesse: $d = 9$, $t_3 = 12$.

Si dualizamos los 12 puntos triples obtenemos una configuración muy relevante de 12 rectas con $t_2 = 12$ $t_4 = 9$
"La configuración de Hesse"



⇝ mirar ejercicio 2 de día 2 de la guía, donde se relacionan curvas elípticas con conf. de Hesse.





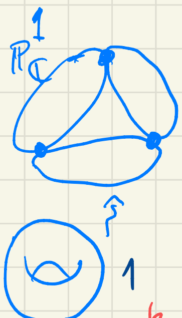
⇝ Dualizar puntos: Recordar biyección puntos - rectas

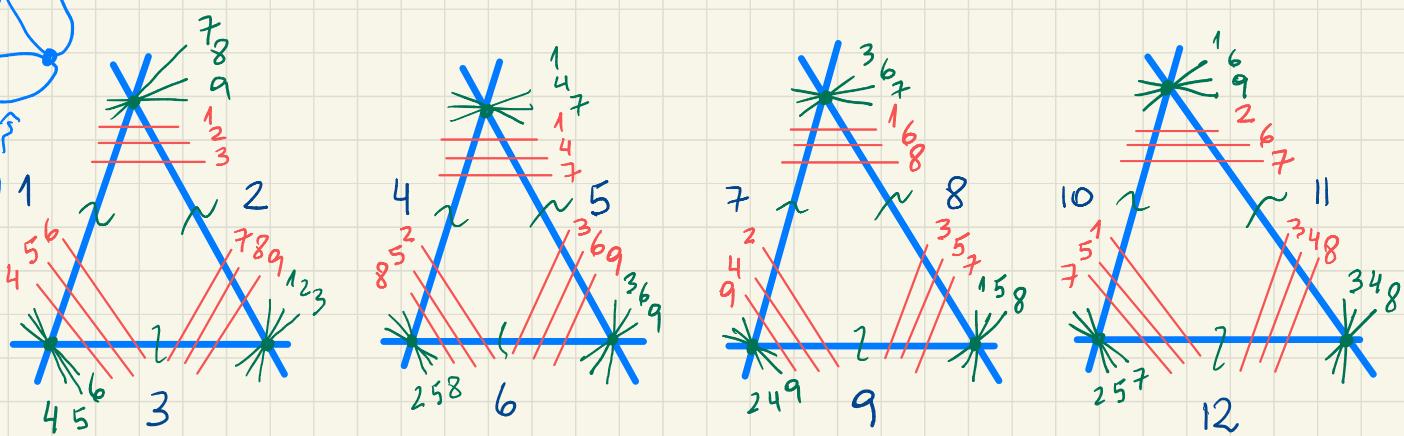
$$[a, b, c] \longleftrightarrow \{ax + by + cz = 0\}$$

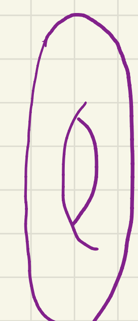
Así $\mathbb{P}^2$ es el espacio de moduli de rectas. Ver ejercicio 6 de día 1 en la guía para cuádricas.

Ejlo Configuración Chilena de Cónicas (Contar el porqué y mostrar el paper)

12 cónicas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con $t_2 = 12$, $t_8 = 9$. Depende de 1 parámetro.







Los azules son los 12 cónicas
Los rosados son los 9 8-puntos
¡Los verdes forman la configuración dual de Hesse!

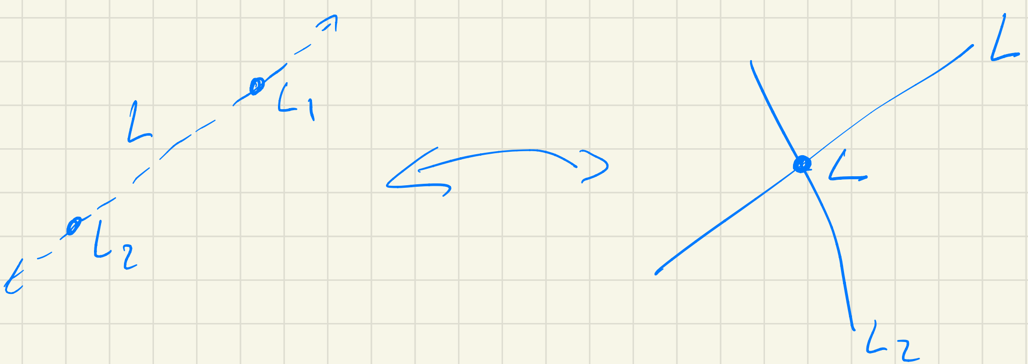
Y hay 4 degeneraciones que hacen aparecer la Hesse!

- Mañana miraremos restricciones en $\overline{C}_1^2, \overline{C}_2$ que vienen de la combinatoria y de k. ¿Cómo decidir sobre la realización de una configuración «combinatorial»? ¿Cómo medir cuán especial es una configuración?
- Irán saliendo varias preguntas abiertas que se explicarán durante los últimos 2 días ...

$$\mathbb{P}^2_k \xleftrightarrow{1-1} \{\text{rectas en } \mathbb{P}^2_k\}$$

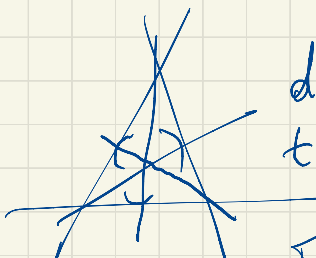
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2_k & & \\ \Psi & & \\ [a,b,c] & \longmapsto & \{ax+by+cz=0\} \end{array}$$

dualidad punto
recta.



* Clasificar las configuraciones de rectas con sólo puntos triples $\left[\binom{d}{2} = 3t_3 \right]$.

Hoy:



$d=7$

$t_3=7$

Fano

$\mathrm{char}=2$

dual Hesse

$d=9$

$t_3=12$

$k=\mathbb{C}$

$t_2>0$

$\mathbb{R}$

no hay.