Día 3

Geografía

6 - 1 - 21

Como la vez anterior, hoy sólo configuraciones de rectas:

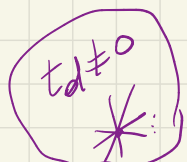
$$\mathcal{A} = \{L_1, L_2, \dots, L_d\}$$

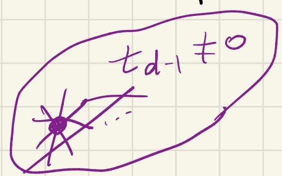
en $\mathbb{P}^2_k$, k cuerpo arbitrario.

geografía: Dados $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ $\exists\, \mathcal{A}$ tal que $\bar{c}_1^2 = a$, $\bar{c}_2 = b$?

§1. Propiedades de los números de Chern.

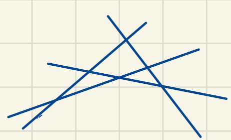
Recordar que $\binom{d}{2} = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} t_m$ es lo único visto por ahora e independiente de k.





__Proposición__: Si $t_d = t_{d-1} = 0$, entonces $\bar{c}_1^2 > 0$ ✓ y $\bar{c}_2 > 0$ ✓.

__Dem__:



$\bar{c}_1^2 = 1$

$\bar{c}_2 = 1$

hacer inducción en d viendo como cambian $\bar{c}_1^2, \bar{c}_2$ de d a $d+1$ ■

Proposición: Si $t_d = t_{d-1} = 0$, entonces $1 + \frac{d-4}{d-2} \leq \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$ = pend. de Chern

y tenemos igualdad ssi $t_2 = \binom{d}{2}$. (caso genérico)

Dem: La desigualdad es equivalente a

$$0 \leq (d-2)\bar{c}_2 - (2d-6)\bar{c}_1^2 = \sum_{m \geq 2}^{d-2} t_m\left(-m^2 + m(1+d) + (2-2d)\right)$$

Pero $-m^2 + m(1+d) + (2-2d) \geq 0$ para todo $2 \leq m \leq d-1$.

Mejor $-m^2 + m(1+d) + (2-2d) > 0$ para todo $3 \leq m \leq d-2$. ■

$\{A_n\}$ conj. con d_n rectas $\to \infty$ $\quad \bar{c}_1^2/\bar{c}_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} r \in [1,2[$

Notar que la proposición anterior implica que $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2$ (Pendiente de Chern) no se acumula en $[1,2[$ (Si lo hace en 2).

¿ Serán clasificables todos los A con $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} < 2$?

¿ Cuáles son los k que aparecen ?

Teorema (de Bruijn-Erdös 1948) Si $t_d = 0$, entonces $\bar{c}_1^2 \leq 3\bar{c}_2$ y tenemos igualdad ssi $t_{d-1} = 1$ o $\mathcal{A}$ es configuración de plano proyectivo finito.

Dem. Notar que $\bar{c}_1^2 \leq 3\bar{c}_2 \iff \sum_{m\geq 2} t_m \geq d$.

m-puntos : $P_1, P_2, \ldots, P_r$ donde $r = \sum_{m \geq 2} t_m$.
rectas : $L_1, L_2, \ldots, L_d$

Definir

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \in L_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \therefore \text{ ver } L_j \in \mathbb{Q}^r$$

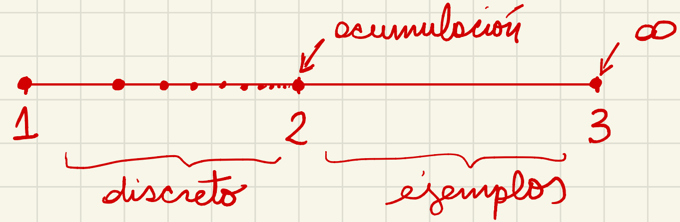
Luego queremos probar que $\{L_1, \ldots, L_d\}$ es l. i.

Suponer que no, digamos que $L_1 = \sum_{j=2}^{d} x_j L_j$, $x_j \in \mathbb{Q}$.

Usar producto punto usual para encontrar $x_j = \dfrac{L_1 \cdot L_1 - 1}{1 - L_j \cdot L_j} < 0$ ya que $L_j \cdot L_j = \#\left\{\begin{smallmatrix}\text{puntos}\\ \text{en } L_j\end{smallmatrix}\right\} \geq 2$. $\rightarrow\leftarrow$

La caracterización de la igualdad es más complicada.
Mirar e.g. [Eterovic, Figueroa, yo] Theorem 2.7 ∎

Resumen: $\dfrac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} \in$



$c_1^2 \leq 3c_2$
BMY
$\mathbb{C}$ ...

¿Cuál es la distribución de $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2$ en $[1,3]$?
¿Puntos de acumulación? ¿Cómo influye k?

§2. Densidad.

Sabemos que los puntos de acumulación pueden vivir en $[2,3]$.

<u>Lema de densidad</u>. Sea k un cuerpo infinito. Sea A_n una colección de configuraciones de rectas tal que $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ y $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c > 2$. Asumir que existe $h \in \,]1,2]$

tal que $\bar{c}_1^{\,2}/d_n^{\,h} \xrightarrow[n\to\infty]{} a>0$.

Entonces el conj. de $\bar{c}_1^{\,2}/\bar{c}_2$ sobre k es denso en $[2, c]$.

Dem: Mirar [EFU, Lema 2]. Es elemental. ■

Corolario: $\bar{c}_1^{\,2}/c_2$ es denso en $[2,3]$ si $k \supseteq \overline{\mathbb{F}_p}$.

Dem: $A_n = \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_{p^n}}$, $c=3$, podemos usar $h=3/2$ ■

¿Qué podemos decir en característica cero?

§3. Configuraciones reales.

Digamos que $k=\mathbb{R}$. Luego las configuraciones reales son las dibujables! (Pensar que recta en el infinito no es parte de la config. y no hay paralelas)

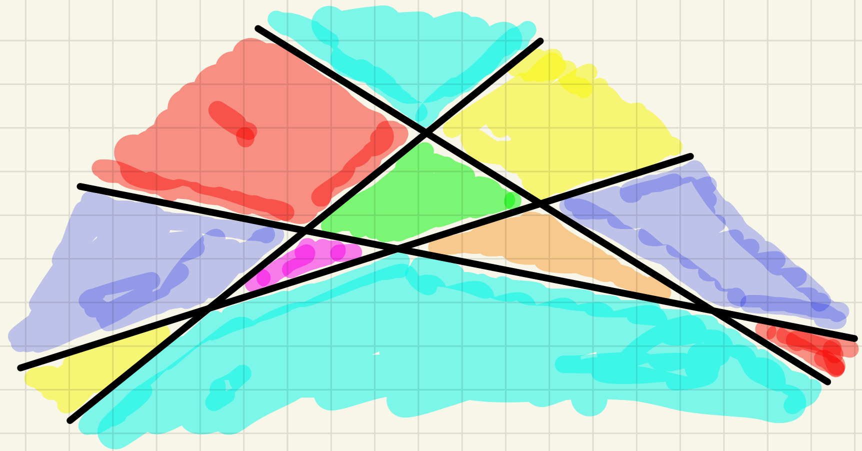
Dada una configuración real, entonces tenemos una pavimentación por polígonos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (salvo $t_d \neq 0$).

$P_n = \#\left\{\begin{array}{l}\text{polígonos}\\ \text{de } n \text{ lados}\end{array}\right\}$

$\Downarrow$

$P_3 = 4$

$P_4 = 3$



Algo que siempre pasará: $\sum_{m\geq 2} t_m$ - «segmentos» $+ \sum_{n\geq 3} p_n = 1$

donde 1 es la característica de Euler de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

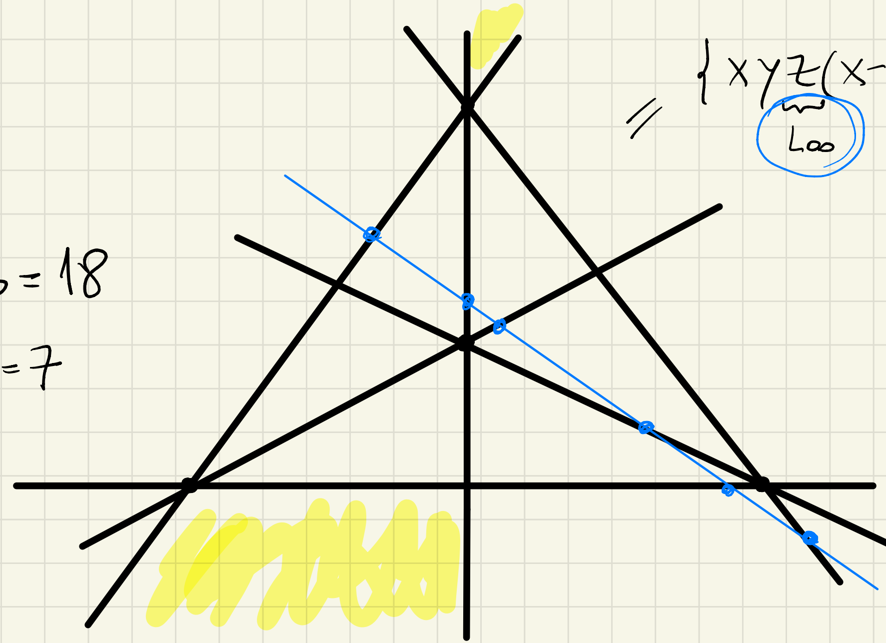
Dentro que estas configuraciones reales, destacan los simpliciales: Pavimentación con solo triángulos.

Ejemplo:

$P_3 = 12$

segmentos $= 3 \cdot 6 = 18$

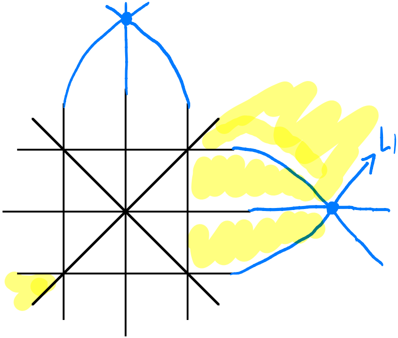
$\sum_{m \geq 2} t_m = 3 + 4 = 7$



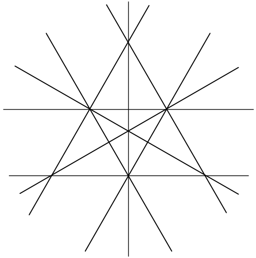
$$\| \quad \{ xy\underbrace{z}_{L_\infty}(x-y)(x-z)(y-z) = 0 \}$$

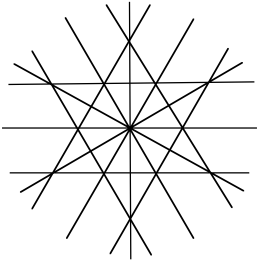
y $\bar{c}_1^2 = 2.5\, \bar{c}_2$

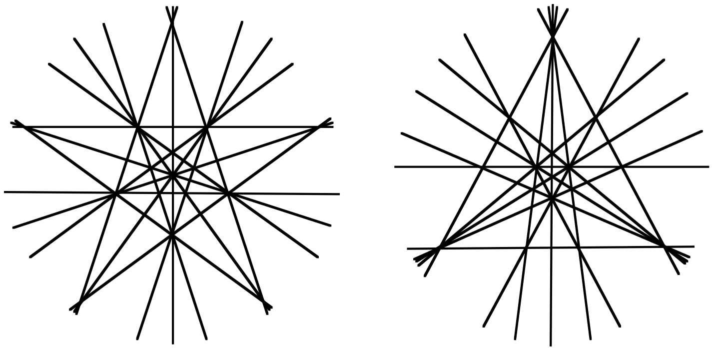
Tarea: Dado un n-polígono regular, consideramos las $2n$ rectas definidas por lados y ejes de simetría $\Rightarrow$ es simplicial (y $\bar{c}_1^2 = 2.5\, \bar{c}_2$)

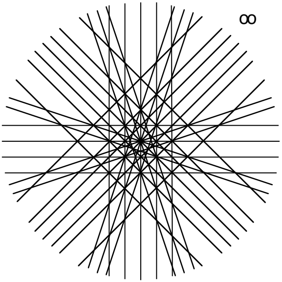


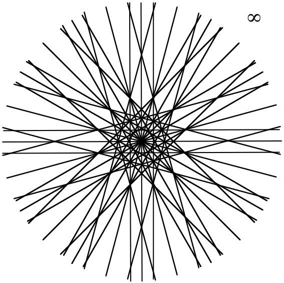
L_1

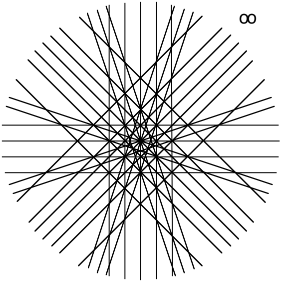


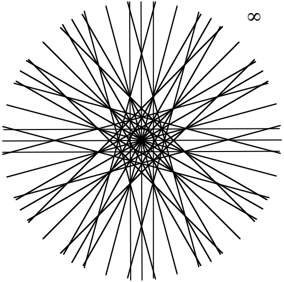












La última tiene 37 rectas (contando la del ∞) y

$$t_2 = 72 \quad t_3 = 72 \quad t_4 = 12 \quad t_5 = 24 \quad t_{12} = 1$$

¡y hay más! [Problema Abierto: Clasificar configuraciones simpliciales]

Corolario: $\bar{C}_1^2/\bar{C}_2$ es denso en $[2, 2.5]$ si $k = \mathbb{R}$.

Dem: Lema densidad con $c = \frac{5}{2}$, $h = 2$ ∎

Se puede mostrar que las configuraciones de polígonos regulares no están definidas en $\mathbb{Q}$ si $n > 6$.
Por otro lado, tenemos familia de configuraciones sobre $\mathbb{Q}$ con $\bar{C}_1^2/\bar{C}_2 \longrightarrow 2.375$. [EFU, Ex. 4.5]

Problema abierto 1: ¿Será que $\bar{C}_1^2/\bar{C}_2$ es denso en $[2, \frac{5}{2}]$ $k = \mathbb{Q}$?

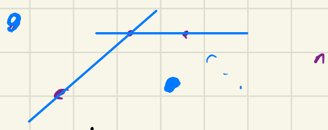
Otra característica "rara" de $\mathbb{R}$ es la existencia de 2-puntos.

Teorema (Sylvester-Gallai): Si $t_d = 0$, entonces $t_2 > 0$.

Por dualidad punto-recta es equivalente a: Dados d puntos no colineales, existe una recta que contiene exactamente dos.

Dem: (No puede ser independiente de k, tampoco es car $= 0$, depende de $\mathbb{R}$)

Sacado de «Proofs from THE BOOK».

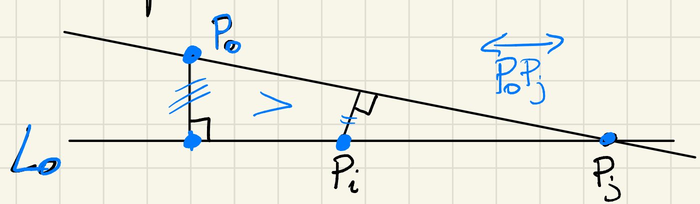


Sean $\{L_1, \dots, L_r\}$ todas las rectas por al menos 2 puntos.

Formar pares $\{(L,P) : L = L_j,\ P = P_i,\ P \notin L\}$. Hay al menos un par y son finitos pares.

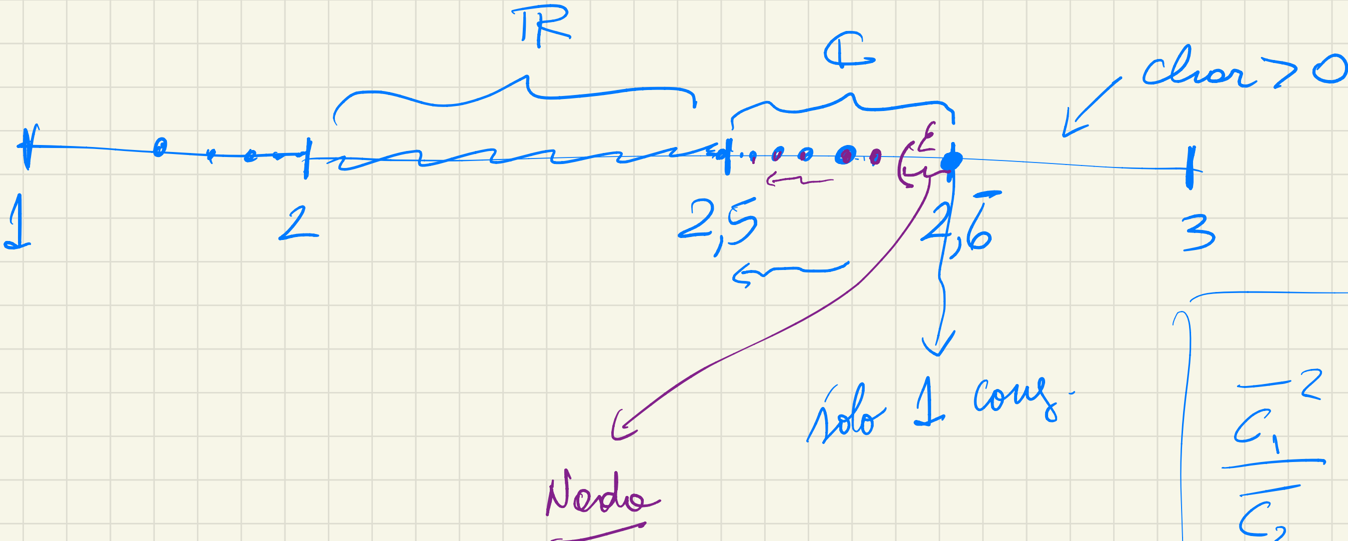
Tomar (L_0, P_0) tal que $\mathrm{dist}(L_0, P_0)$ es lo más pequeño. Luego L_0 contiene 2 puntos. Sino contiene al menos 3 puntos y

Conj real no trivial
$\Downarrow$
$t_2 > 0$



$\left(\overleftrightarrow{P_0P_j},\ P_i\right)$

$\mathbb{C}$?



$$\boxed{\frac{\bar{c}_1^{\,2}}{\bar{c}_2} = \frac{8}{3} \quad \Updownarrow \quad \text{dual Hesse.}}$$