Día 4

Problemas abiertos I

7-1-21

La vez anterior vimos que para configuraciones reales $t_2 > 0$.

<u>Teorema</u> : Asumir que $t_d = t_{d-1} = 0$. Entonces,

(1) $k = \mathbb{R}$ implica $\bar{c}_1^2 \leq \frac{5}{2} \bar{c}_2$ e igualdad ssi $\mathcal{A}$ es simplicial.

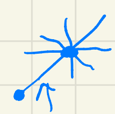
(2) $k = \mathbb{C}$ implica $\bar{c}_1^2 \leq \frac{8}{3} \bar{c}_2$ e igualdad ssi $\mathcal{A}$ es la Hesse dual.

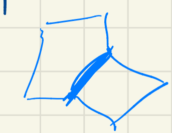
<u>Dem</u> :

(1) $\bar{c}_1^2 \leq \frac{5}{2} \bar{c}_2$ es equivalente a $t_2 \geq 3 + \sum_{m \geq 4} (m-3) t_m$ (Melchior).

Dada configuración real $\mathcal{A}$ tenemos pavimentación por polígonos. Sean :

$f_0 :=$ # puntos $= \sum_{m \geq 2} t_m$





$f_1 :=$ # segmentos $= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 2} 2m \cdot t_m = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 3} m \, p_m$

$f_2 := \sum_{m \geq 3} p_m$

Sabemos que $e(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) = 1$ y así :

$$f_0 - f_1 + f_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad f_0 - \alpha f_1 - (1-\alpha) f_1 + f_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m\geq 2} t_m - \alpha \sum_{m\geq 2} m t_m - \frac{(1-\alpha)}{2} \sum_{m\geq 3} m p_m + \sum_{m\geq 3} p_m = 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 - \sum_{m\geq 2} (\alpha m - 1) t_m = \sum_{m\geq 3} \underbrace{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) m - 1 \right)} p_m$$

si $\geq 0 \Rightarrow$ desigualdad en t_m

$\Updownarrow$

$1 - \frac{2}{m} \geq \alpha \qquad \alpha = \frac{1}{3}$ óptimo

$$\Rightarrow \quad -3 - \sum_{m\geq 2} (m-3) t_m = \sum_{m\geq 3} (m-3) p_m \geq 0$$

y tenemos = ssi $p_m = 0 \ \forall m \geq 4$ ie simplicial.

(2) La idea es de Hirzebruch y apareció en su paper « Arrangements of lines and algebraic surfaces » 1983.

Primero: $\bar{C}_1^2 \leq \frac{8}{3} \bar{C}_2 \iff 3 + d + \sum_{m \geq 5} (m-4) t_m \leq 2t_2 + t_3$

Segundo: En el paper de Hirzebruch, se demuestra (con resultados de Sakai) que:

$$(\bigstar) \qquad d + \sum_{m \geq 5} (m-4) t_m \leq t_2 + \frac{3}{4} t_3$$

$\binom{d}{2} = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} t_m$

Luego sólo basta con mostrar $3 \leq t_2 + \frac{1}{4} t_3$ (Suponer lo contrario y $(\bigstar) \Rightarrow \rightarrow\leftarrow$)

Caso = aterriza en $d = 9$, $t_3 = 12$ (Tarea!) y

se puede mostrar que $d = 9, t_3 = 12 \iff$ Hesse dual (Tarea!)

Pero ¿De dónde sale $(\bigstar)$?

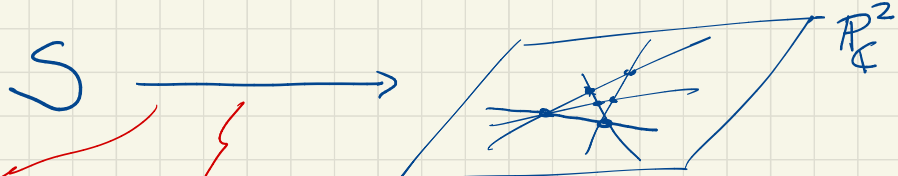
Ahí está la idea de Hirzebruch sobre comparar con números de Chern de superficies complejas de tipo general: $c_1^2(S)$, $c_2(S)$ = Caract. de Euler.

En 1977 se demostró la desigualdad de Bogomolov–Miyaoka–Yau:

$$\text{(BMY)} \qquad c_1^2(S) \leq 3c_2(S)$$

(wow! recordar con la combinatoria)

$\left(\text{y hay} = \text{ssi } S = \mathbb{B}^2/\Gamma \right.$ (muy diferente a lo que sucede con superficies de Riemann) $\left. \right)$



morfismo genéricamente finito

Construcción de S a través de cubrimiento de Kummer.

<u>Pero</u> ¿De dónde sale la desigualdad BMY?

Eso corresponde a herramientas más sofisticadas de geometría algebraica, muy lejanas a este cursillo ∎

PA1: Encontrar demostración topológica de $\bar{c}_1^2 \leq \frac{8}{3}\bar{c}_2$ al estilo de configuraciones reales.

No existe al parecer otra demostración que no pase por BMY y sus generalizaciones.

Hay muchas preguntas relacionadas, por ejemplo mirar:

« Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality? »

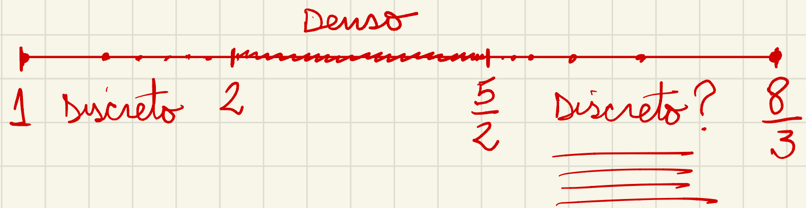
János Kollár, Pure Appl. Math. Q. 4 (2008).

PA2: Tenemos que $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$ es denso en $[2, \frac{5}{2}]$ para $k = \mathbb{R}$

y eso viene con la $\bar{c}_1^2 \leq \frac{5}{2}\bar{c}_2$.

¿Qué se puede decir para $[2, \frac{8}{3}]$ cuando $k = \mathbb{C}$?

Conjetura :



No hay puntos de acumulación en $]\frac{5}{2},\frac{8}{3}]$.

¿De qué forma entra $\mathbb{C}$ en ese potencial fenómeno?

¿Es posible describir los puntos en $]\frac{5}{2},\frac{8}{3}]$?

PA 3 : Entender configuraciones complejas de rectas se puede reducir a entender configuraciones de rectas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Para una estructura de incidencia fija, podemos escribir ecuaciones afines sobre $\mathbb{Q}$ cuyas soluciones representan configuraciones de d rectas con esa estructura fija. Luego, si tenemos un punto complejo (ie conf. de d rectas sobre $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ por Nullstellensatz, tenemos uno sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Luego, sería muy interesante tener desigualdades para $\overline{c_1^2}, \overline{c_2}$ que dependan de alguna forma de cuerpos de números.

— o —

Hirzebruch's paper.

(0) Familia de simpliciales polig. n lados $A(2n)$, y otra $A(4n+1)$.

(1) Grupos de reflexiones finitos: $G \le GL(\mathbb{C},3)$ finito
$\overset{\shortparallel}{\text{<reflexiones>}}$

(ie fija un plano pasando por (0,0,0))

Ej/ Configuración de 21 rectas de Klein (definida por 21 reflexiones en G_{168})

[Clasificados por Shephard-Todd (1954)] $\to GL(\mathbb{C},n)$

$t_3 = 28 \quad t_4 = 21 \quad \therefore \quad \bar{c}_1^2/\bar{c}_2 = 2{,}65.$

Mirar Hirzebruch's paper para clasificación.

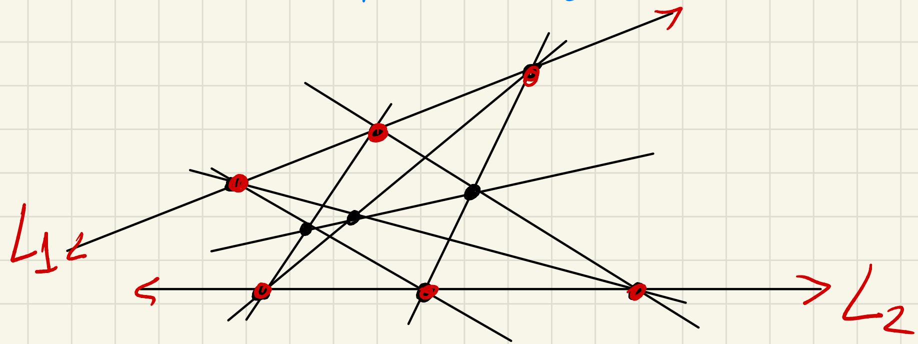
Ceva n	Ceva n (agregar 3 rectas)	Hesse	A_{26}	A_{27}
$\dfrac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} = \dfrac{5n^2-6n-3}{2n^2-3n} \le \dfrac{8}{3}$	$\dfrac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} = 2.5$	$\dfrac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} = 2.5$	$\dfrac{80}{31} = 2.580\ldots$	$\dfrac{95}{36} = 2.63\bar{8}$

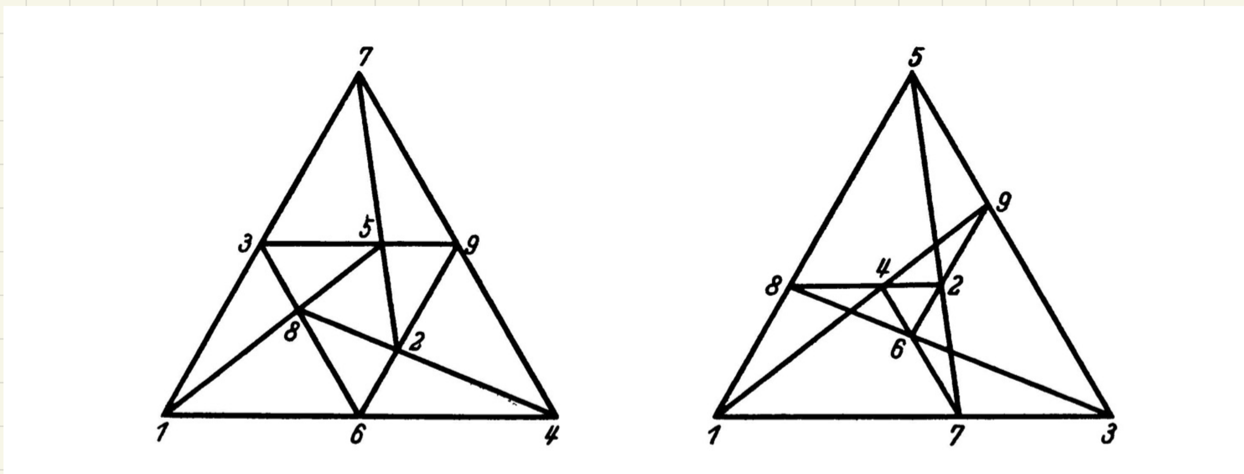
(2) Tomando 9_3 (p. 102 "Geometry and the imagination") # puntos, rectas P_nL_m, $9_{③}\ 9_{③}$

Hay 3 combinatorias distintas y todas realizables en $k=\mathbb{R}$.

Una de ellas es la del Teorema de Pappus:

(Especialización de PASCAL)





(3)

$$\bar{C}_1^2 = 9 - 5d + \sum_{m \geq 2} (3m-4) t_m$$

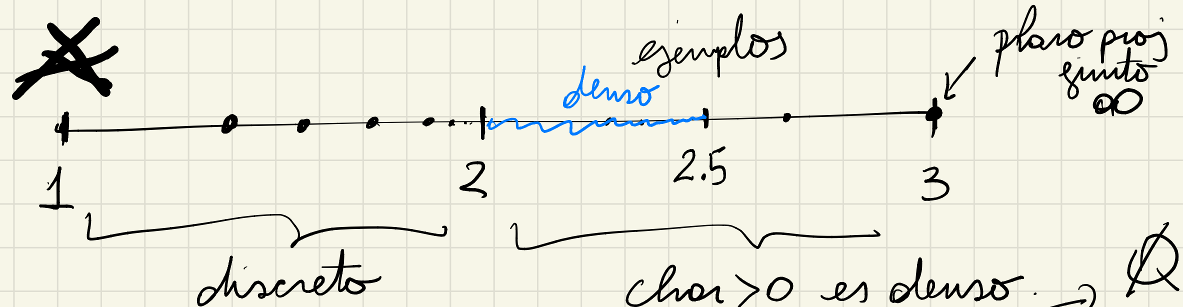
$$\bar{C}_2 = 3 - 2d + \sum_{m \geq 2} (m-1) t_m$$

$$\mathcal{A} = \{L_1, L_2, \dots, L_d\} \subseteq \mathbb{P}^2_k \quad , \; k \text{ cuerpo fijo arbitrario.}$$

Salvo trivial y casi-trivial (suponiendo $t_d = t_{d-1} = 0$)

$$\Rightarrow \quad \bar{C}_1^2 > 0 \qquad \bar{C}_2 > 0$$

$$\frac{\bar{C}_1^2}{\bar{C}_2} \in$$



$\boxed{k = \mathbb{R} \Rightarrow t_2 > 0}$

¿Qué se puede decir en char $= 0$? $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$