Día 5

Problemas abiertos 2

8-1-21

Hay varios otros problemas en relación a configuraciones de rectas, y en general, curvas planas. Entre ellos y siguiendo con rectas:

I. Constantes de Harbourne y la conjetura de la negatividad acotada.

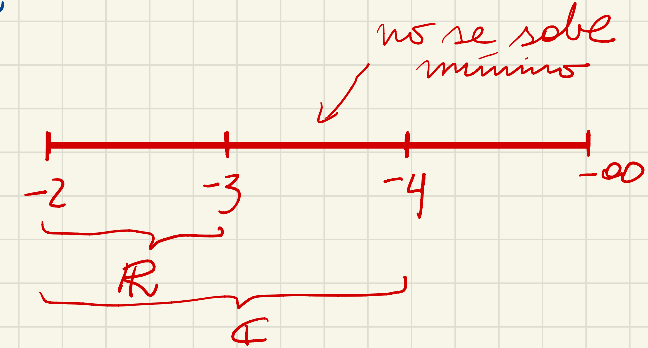
II. La no existencia de 4-nets complejos fuera de la configuración de Hesse.

La I. es todo un tema y decidí gastar esta última clase en II.

(BNC) S = superf. proy. suave sobre $\mathbb{C}$
$\exists\, b \in \mathbb{Z}$ tal que $\Gamma \cdot \Gamma \geq b$ $\forall \underset{\text{curva}}{\Gamma} \subset S$

Para I. mirar [EFU] donde hacemos el puente entre densidades de constantes de Harbourne lineales y números de Chern

$$H_L(\mathcal{A}) := \frac{3-(\bar{c}_1^2 - 2\bar{c}_2)}{d-(\bar{c}_1^2 - 3\bar{c}_2)} - 2 \in$$



Con configuraciones planos proy. finitos $\longrightarrow -\infty$.
[Aquí entran configuraciones de todo tipo]

(BNC) : S = superficie proyectiva nosingular $|_{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow \exists\, b(S) \in \mathbb{Z}$ tal que $\Gamma \cdot \Gamma \geq b(S)$ $\forall$ curva $\Gamma \subset S$.

Ahora vamos a las k-nets... (k no será el cuerpo base, $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$)

Una k-net será una configuración especial de rectas en $\mathbb{P}^2$.

La incidencia entre sus rectas estará codificada en cuadrados Latinos.

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Un cuadrado Latino (CL) es un tablero de n *por* n *relleno con números* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *tales que no se repiten ni en filas ni en columnas.*

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Un cuadrado Latino (CL) es un tablero de n por n relleno con números $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que no se repiten ni en filas ni en columnas.

1	2
2	1

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Un cuadrado Latino (CL) es un tablero de n por n relleno con números $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que no se repiten ni en filas ni en columnas.

1	2
2	1

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Un cuadrado Latino (CL) es un tablero de n por n relleno con números $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que no se repiten ni en filas ni en columnas.

1	2
2	1

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Ahora vamos a las k-nets...

Cuadrados Latinos

Un cuadrado Latino (CL) es un tablero de n por n relleno con números $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que no se repiten ni en filas ni en columnas.

1	2
2	1

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	6	7	8	3	4	5
3	6	2	5	7	1	8	4
4	7	8	2	3	5	1	6
5	8	7	6	2	4	3	1
6	3	1	8	4	2	5	7
7	4	5	1	6	8	2	3
8	5	4	3	1	7	6	2

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	6	7	8	3	4	5
3	6	2	5	7	1	8	4
4	7	8	2	3	5	1	6
5	8	7	6	2	4	3	1
6	3	1	8	4	2	5	7
7	4	5	1	6	8	2	3
8	5	4	3	1	7	6	2

← Tabla de multiplicación del grupo de cuaterniones Q_8

Un Sodoku también es CL

3	4	**1**	**2**	8	**7**	6	**9**	5
8	5	7	**3**	9	6	2	4	1
9	**6**	2	5	4	1	3	**7**	8
2	8	6	**9**	**5**	3	7	**1**	4
1	9	5	4	**7**	2	8	**3**	**6**
7	**3**	**4**	6	1	8	5	2	9
5	2	**9**	**8**	3	4	1	6	7
4	**1**	3	**7**	6	5	**9**	8	**2**
6	7	8	1	2	**9**	**4**	5	**3**

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Cambiamos dos columnas, dos filas, dos números

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Cambiamos dos columnas, dos filas, dos números
Considerarémos todos estos CL como equivalentes.

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Cambiamos dos columnas, dos filas, dos números
Consideraremos todos estos CL como equivalentes.
Los siguientes CL **no** son equivalentes.

¿Qué tienen en común los siguientes cuadrados latinos?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Cambiamos dos columnas, dos filas, dos números
Consideraremos todos estos CL como equivalentes.
Los siguientes CL **no** son equivalentes.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

$\mathbb{Z}/4$ $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

¿Cuántas clases equivalentes de CL de $n \times n$ hay?

n	# CL no equivalentes de $n \times n$
1	1
2	1
3	1
4	2
5	2
6	12
7	147
8	283.657
9	19.270.853.541
10	34.817.397.894.749.939

Miror «On Line Arrangements with applications to 3-nets» (2009)

$\mathbb{Z}/6$

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

S_3

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	6	1	5	4	2
4	5	6	1	2	3
5	4	2	3	6	1
6	3	4	2	1	5

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	2	1	3
5	4	6	3	2	1
6	5	4	1	3	2

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3
6	5	2	1	3	4

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	2	1	4	3
6	5	1	2	3	4

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	6	2	1	4	5
4	5	6	2	3	1
5	3	1	6	2	4
6	4	5	3	1	2

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	1	6	4	2
4	6	5	1	2	3
5	3	6	2	1	4
6	4	2	5	3	1

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	3	4
3	6	1	2	4	5
4	5	2	1	6	3
5	3	4	6	1	2
6	4	5	3	2	1

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	1	2	5	6	4
4	6	5	1	2	3
5	4	6	2	3	1
6	5	4	3	1	2

1	2	3	4	5	6
2	1	6	5	4	3
3	5	1	2	6	4
4	6	2	1	3	5
5	3	4	6	2	1
6	4	5	3	1	2

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	2	6	1	5
4	5	6	2	3	1
5	6	1	3	2	4
6	3	5	1	4	2

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	4	3
3	5	4	2	6	1
4	6	2	3	1	5
5	4	6	1	3	2
6	3	1	5	2	4

El juego geométrico:

Dado CL

2	1
1	2

El juego geométrico:

Dado CL

2	1
1	2

Enumerar columnas, filas, y símbolos tal que

El juego geométrico:

Dado CL

2	1
1	2

Enumerar columnas, filas, y símbolos tal que

$$
\begin{array}{c|cc}
 & L_1 & L_2 \\
\hline
L_3 & L_6 & L_5 \\
L_4 & L_5 & L_6
\end{array}
$$

El juego geométrico:

Dado CL

2	1
1	2

Enumerar columnas, filas, y símbolos tal que

$$\begin{array}{c|cc} & L_1 & L_2 \\ \hline L_3 & L_6 & L_5 \\ L_4 & L_5 & L_6 \end{array}$$

Luego pensar si existe configuración de rectas $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$ sugerido por el CL.

El juego geométrico:

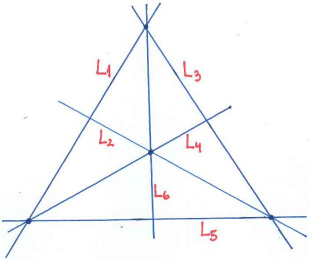
Dado CL

2	1
1	2

Enumerar columnas, filas, y símbolos tal que

	L_1	L_2
L_3	L_6	L_5
L_4	L_5	L_6

Luego pensar si existe configuración de rectas $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$ sugerido por el CL.



Tomemos un representante de 3×3

Tomemos un representante de 3×3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Tomemos un representante de 3×3

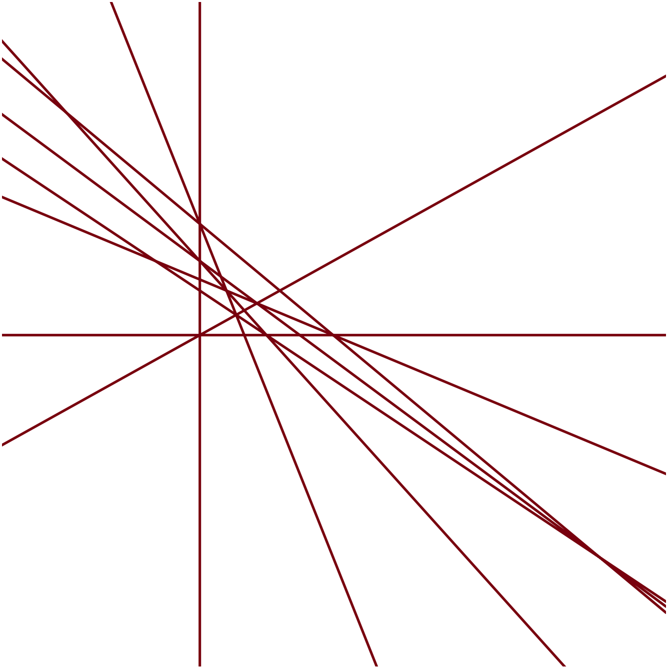
1	2	3
2	3	1
3	1	2

y nos preguntamos por configuración de 9 rectas con los 9 puntos triples

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_7	L_8	L_9
L_5	L_8	L_9	L_7
L_6	L_9	L_7	L_8

$\{0 = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(x^3 - z^3)\}$

¡La Hesse dual es una (3,3)-net!



Dado un cuadrado latino, queremos encontrar configuración de rectas que lo realice. Puede ser real o compleja.

Dado un cuadrado latino, queremos encontrar configuración de rectas que lo realice. Puede ser real o compleja.

Tal configuracion la llamamos una $(3, n)$-**net** (son 3 conjuntos de n rectas que se intersecan en forma de red en n^2 puntos triples).

Dado un cuadrado latino, queremos encontrar configuración de rectas que lo realice. Puede ser real o compleja.

Tal configuracion la llamamos una $(3, n)$-**net** (son 3 conjuntos de n rectas que se intersecan en forma de red en n^2 puntos triples).

¿Será que existe alguna net para cada cuadrado latino?

La respuesta general es **NO**.

La respuesta general es **NO**.

Ejemplo: Para las 12 clases de CL de 6×6 sólo se puede con 9 de ellas.

La respuesta general es **NO**.

Ejemplo: Para las 12 clases de CL de 6×6 sólo se puede con 9 de ellas. Tenemos 7 dibujables, y 2 son estrictamente complejas.

La respuesta general es **NO**.

Ejemplo: Para las 12 clases de CL de 6×6 sólo se puede con 9 de ellas. Tenemos 7 dibujables, y 2 son estrictamente complejas.

No se sabe como identificar los CL realizables por rectas.

La respuesta general es **NO**.

Ejemplo: Para las 12 clases de CL de 6×6 sólo se puede con 9 de ellas. Tenemos 7 dibujables, y 2 son estrictamente complejas.

No se sabe como identificar los CL realizables por rectas.

Esa es otra pregunta abierta.

PA: Dar un criterio para CL que realizan 3-nets.

¿Será que los CL que son **tablas de multiplicar de grupos finitos** son realizables como nets?

[Se pueden caracterizar, mirar la guía y el artículo citado]

Ahora vamos por k-nets con $k > 3$ ...

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ *son* **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares* $(a_{i,j}, b_{i,j})$ *no tiene pares repetidos.*

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ son **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares $(a_{i,j}, b_{i,j})$ no tiene pares repetidos.*

Una colección de cuadrados latinos es **mutuamente ortogonal** *(CLMO) si lo son a pares.*

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ *son* **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares* $(a_{i,j}, b_{i,j})$ *no tiene pares repetidos.*

Una colección de cuadrados latinos es **mutuamente ortogonal** *(CLMO) si lo son a pares.*

Por ejemplo, estos dos CL son CLO.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

11	23	32
33	12	21
22	31	13

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ son **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares $(a_{i,j}, b_{i,j})$ no tiene pares repetidos.*

Una colección de cuadrados latinos es **mutuamente ortogonal** *(CLMO) si lo son a pares.*

Por ejemplo, estos dos CL son CLO.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

11	23	32
33	12	21
22	31	13

Se puede demostrar que

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ *son* **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares* $(a_{i,j}, b_{i,j})$ *no tiene pares repetidos.*

Una colección de cuadrados latinos es **mutuamente ortogonal** *(CLMO) si lo son a pares.*

Por ejemplo, estos dos CL son CLO.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

11	23	32
33	12	21
22	31	13

Se puede demostrar que

- El máximo largo de CLMO es $n-1$. (Se alcanza con $n = p^s$.)

Eso tiene que ver con planos proy. finitos.

Dos cuadrados latinos $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ *son* **ortogonales** *(CLO) si el cuadrado de pares* $(a_{i,j}, b_{i,j})$ *no tiene pares repetidos.*

Una colección de cuadrados latinos es **mutuamente ortogonal** *(CLMO) si lo son a pares.*

Por ejemplo, estos dos CL son CLO.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

11	23	32
33	12	21
22	31	13

Se puede demostrar que

- El máximo largo de CLMO es $n-1$. (Se alcanza con $n = p^s$.)
- Para todo $n \neq 2, 6$ hay al menos dos CLO. ($n = 6$ es problema de los 36 oficiales de Euler.)

1782, solución en 1901

Tomar $k \geq 3$. Dada una colección de $(k-2)$ CLMO, queremos también obtener nets.

Tomar $k \geq 3$. Dada una colección de $(k-2)$ CLMO, queremos también obtener nets.

Tendremos k grupos de n rectas las cuales se intersectan en n^2 k-puntos en forma de red.

Tomar $k \geq 3$. Dada una colección de $(\overset{n}{\cancel{k}} - 2)$ CLMO, queremos también obtener nets.

Tendremos k grupos de n rectas las cuales se intersectan en n^2 k-puntos en forma de red.

Llamamos a tal configuración una (k, n)-**net**.

Tomar $k \geq 3$. Dada una colección de $(k-2)$ CLMO, queremos también obtener nets.

Tendremos k grupos de n rectas las cuales se intersectan en n^2 k-puntos en forma de red.

Llamamos a tal configuración una (k, n)-**net**.

Pregunta natural ¿Existirán (k, n)-nets para $k > 3$?

Configuración de Hesse

Configuración de Hesse

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_7	L_8	L_9
L_5	L_8	L_9	L_7
L_6	L_9	L_7	L_8

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_5	L_{12}	L_{10}	L_{11}
L_6	L_{11}	L_{12}	L_{10}

Configuración de Hesse

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_7	L_8	L_9
L_5	L_8	L_9	L_7
L_6	L_9	L_7	L_8

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_5	L_{12}	L_{10}	L_{11}
L_6	L_{11}	L_{12}	L_{10}

Es una configuración compleja.

Configuración de Hesse

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_7	L_8	L_9
L_5	L_8	L_9	L_7
L_6	L_9	L_7	L_8

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_5	L_{12}	L_{10}	L_{11}
L_6	L_{11}	L_{12}	L_{10}

Es una configuración compleja.

Si $\xi = 1/2 + \sqrt{3}/2i$, entonces las rectas son:

Configuración de Hesse

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_7	L_8	L_9
L_5	L_8	L_9	L_7
L_6	L_9	L_7	L_8

	L_1	L_2	L_3
L_4	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_5	L_{12}	L_{10}	L_{11}
L_6	L_{11}	L_{12}	L_{10}

Es una configuración compleja. $\mathbb{P}^1$ $d=12$ $t_2=12$ $t_4=9$

Si $\xi = 1/2 + \sqrt{3}/2i$, entonces las rectas son:

$$L_1 = \xi x + 2y + 1, L_2 = 2x + y + 1, L_3 = y$$

$$L_4 = x, L_5 = x + 1, L_6 = (\xi + 1)x + (\xi + 1)y + 1$$

$$L_7 = x + (1/\xi^2 + 1)y + 1, L_8 = (\xi + 1)x + y + 1, L_9 = \xi x + y$$

$$L_{10} = (\xi + 1)x + (\xi + 1)y + 1, L_{11} = x + y + 1, L_{12} = x - \xi y$$

Usando nuevamente la característica de Euler sobre la fibración compleja definida por una (k,n)-net tenemos:

$(\alpha \cdots \alpha)$ $\quad g = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Proposición: Una (k,n)-net en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ satisface $(3, n \geq 2)$ ó $(4, n \geq 3)$ ó $(5, n \geq 6)$.

$1 \; 2 \cdots k$ $\quad S = Bl_{n^2 \text{ptos}}(\mathbb{P}^2)$ $\quad e(S) \cdots$

$\downarrow$ $\quad \to \; * * \cdots_{n^2} \; \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{P}^1$

En la guía se menciona paper elemental que discute como eliminar 5-nets.

Conjetura: La única $(4,n)$-net es la configuración de Hesse.

$$\sigma = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)$$

Noticia: Al parecer se podría demostrar la conjetura

A. Bassa, A. Ozgur «The only complex 4-net is the Hesse configuration» (2020)

La idea, similar a Hirzebruch, es construir por medio de cubrimientos de Kummer una superficie de tipo general la cual debe tener signatura topológica positiva ($\Leftrightarrow$ $c_1^2/c_2 > 2$), pero un cálculo directo topológico (que está en revisión) muestra lo contrario, a menos que sea la configuración de Hesse.

Fin.

L_1 L_n

L_{n+1} L_{2n+1}

L_{2n} L_{3n}

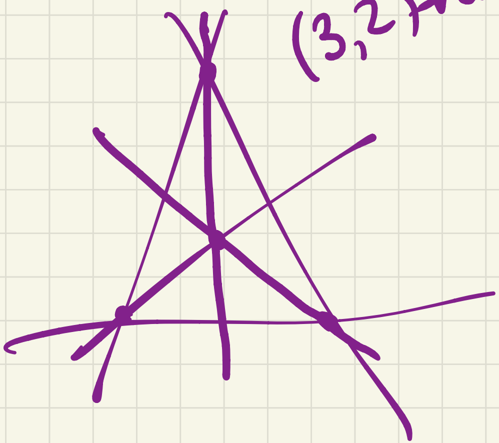
L_{3n+1}

L_{4n}

L_{4n+1}

L_{5n}

(3,2)-net



$\boxed{5n}$

$\boxed{n^2 \text{ 5 puntos}}$

$\dim = 0 \longrightarrow$