AUTOMORFISMOS DE SINGULARIDADES
SEMINARIO GEOMETRÍA ALGEBRAICA UC

JAIME NEGRETE

1. MOTIVACIÓN

Recordemos que una superficie de Horikawa es una superficie Y de tipo general minimal que satisface la relación $K_Y^2 = 2p_g(Y) - 4$ ($p_g(Y) \geq 3$). El espacio de moduli de estas superficies, así como propiedades topologicas de las las superficies en tales espacios fueron estudiadas en [H]. Para todo K_Y^2 fijo, excepto en el caso $K_Y^2 = 16\ell$ para $\ell \geq 1$ sabemos decir si superficies (posiblemente en distintas componentes del respectivo espacio de moduli) son difeomorfas o no. En el caso particular de $K^2 = 16\ell$ con $l \geq 1$ el espacio de moduli tiene 2 componentes y no sabemos si superficies en componentes distintas son difeomorfas. Una manera de atacar este problema es por medio de KSBA degeneraciones. En un trabajo en conjunto con Vicente Monreal y Giancarlo Urzúa, pudimos clasificar todas las posibles superficies con T-singularidades que podrían ser degeneraciones de superficies de Horikawa. Sin embargo, no sabemos si tales superficies singulares admiten una suavización. En general esto ultimo es dificil y el único truco conocido para hacerlo es por medio del siguiente resultado:

Theorem 1.1. *Sea X una superficie proyectiva con T-singularidades. Supongamos que un grupo ciclico G actua en X tal que:*

(1) $Y = X/G$ es una superficie proyectiva con T-singularidades.
(2) $p_g(Y) = q(Y) = 0$
(3) Y tiene una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein.
(4) El mapeo $\sigma\colon X \to Y$ inducido por el cubrimiento ciclico es flat, y el branch D(respec. lugar de ramificiación)es una curva irreducible no singular fuera del lugar singular de Y (resp. de X)
(5) $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = 0$

Luego existe una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein de X que es compatible con una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein de Y, y el cubrimiento ciclico se extiende a la suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

Proof. [LP, Theorem 2.2] □

Finalmente, para poder atacar el problema diffeo., y despues de ver nuestra lista de candidatos a degeneración de superficies de Horikawas con T-singularidades, surge naturalmente la idea de cambiar un poco el punto (4) del resultado previo. La pregunta es: ¿Podemos encontrar cubrimientos dobles entre singularidades? o más generalmente: ¿Podemos encontrar cubrimientos entre singularidades?.

Remark 1.2. El hecho de pensar en cubrimientos dobles es simplemente por la forma en que uno construye las superficies de Horikawa. En general se ven como cubrimiento dobles ramificados de superficies de Hirzebruch, con cierto branch conexo o disconexo dependiendo del caso.

2. CATANESE PAPER

Catanese estaba interesado en describir todos los grupos finitos de automorfismos actuando en un punto racional doble, digamos $X = \mathbb{C}^2/G$, donde G es un subgrupo finito de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (actuando linealmente). Consideremos el morfismo cociente $\pi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/G = X$. Notemos que $\forall g \in G\backslash\{Id\}$, 0 es el unico punto fijo de g, pues si $g \in G\backslash\{Id\}$ y $x \neq 0$ es punto fijo de g, es lo mismo que decir que $\lambda_1 = 1$ es un valor propio de g. Como $det(g) = 1$, se sigue que $\lambda_2 = 1$, y así la forma canonica de Jordan de g debe ser

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y tenemos que $g = AJA^{-1}$ con A una matriz invertible. Como G es finito, entonces existe n tal que $g^n = I$, y así $I = g^n = AJ^nA^{-1}$, lo cual es absurdo pues J no tiene orden finito.

Example 2.1. Consideremos los siguientes subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$:
$G_1 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $G_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$ y $G_3 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$
Notamos que G_1 y G_3 son subgrupos de G_2 y que además G_3 es un subgrupo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ por lo que esperamos tener una superficie singular $X_3 = \mathbb{C}^2/G_3$. Es claro que en el primer y segundo caso los anillos de invariantes son

$$\mathbb{C}[x,y]^{G_1} = \mathbb{C}[x^2,y] \qquad y \qquad \mathbb{C}[x,y]^{G_3} = \mathbb{C}[x^2,y^2]$$

Por otro lado, en el tercer caso vemos que x^2, xy y y^2 son invariantes, y se puede probar que

$$\mathbb{C}[x,y]^{G_3} \cong \mathbb{C}[u,v,w]/(uv - w^2)$$

Luego considerando $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]^G)$ para cada uno de estos G tendremos el siguiente diagrama de morfismos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "(x,y)\mapsto(x^2,y)"] \arrow[d] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, "(x,y)\mapsto(x,y^2)"] & \mathbb{C}^2 \\
\mathbb{C}^2/G_2 \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Notamos que $G_1 \cong G_3$ como grupos, pero claramente $\mathbb{C}^2/G_1$ y $\mathbb{C}^2/G_3$ son distintos, ya que depende de como esté actuando el grupo. Por la motivación inicial, me gustaría entender los casos donde $\mathbb{C}^2/H = \mathbb{C}^2$ para $H \leq G$ y los respectivos morfismos a $X_i = \mathbb{C}^2/H_i$ cuando X_i es una superficie singular. Del mismo modo queremos entender los respectivos morfismos (en caso de existir) entre X_i y X_j para algunos subgrupos H_i y H_j respectivamente.

Lemma 2.2. *Sea $G \leq GL(2,\mathbb{C})$ un grupo ciclico finito generado por g.*

(1) $\mathbb{C}[x,y]^G$ es generado por 2 elementos si y solo si uno de los valores propios de g es igual a 1.
(2) Si G no contiene elementos no triviales con valor propio igual a 1. $\mathbb{C}[x,y]^G$ está generado por 3 elementos si y solo si G es un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$.

Proof. Veamos solo la propiedad (1), la otra es análoga.
$\Leftarrow$) Como G es finito, entonces g debe tener tener orden finito, así g es una raíz del polinomio $\lambda^n - 1$, para algún n y por lo tanto los valores propios de g son raices n-esimas de la unidad. Por lo tanto

$$g = \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \xi_n \text{ raíz n-esima de la unidad}$$

Es claro que los polinomios $f_1(x,y) = x^n$ y $f_2(x,y) = y$ son invariantes para g, y por lo tanto para cada elemento de G. Además, se puede ver que ellos generan todo $\mathbb{C}[x,y]^G$.
$\Rightarrow$) Por contrareciproco, como G es finito tenemos que los valores propios de g son raices de la unidad. S.P.G podemos suponer que

$$g = \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n^q \end{pmatrix} \text{ donde } 0 < q < n$$

Luego, es claro que $f_1(x,y) = x^n$, $f_2(x,y) = y^n$ y $f_3(x,y) = x^{n-q}y$ son invariantes y no tenemos relaciones entre ellos. □

Siguiendo con la discusión previa, tenemos que π está ramificado solamente en el origen y $\pi' \colon \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \to X \to \{x_0\}$ es un cubrimiento no-ramificado con grupo G. Si τ es un automorfismo del germen (X, x_0): ya que π' es no ramificado y normal, luego existen $|G|$ levantamientos $\widetilde{\tau}'$ de $\tau|_{X-\{x_0\}}$ los cuales por el teorema de Riemann-Hartogs se extienden a automorfismos $\widetilde{\tau}$ del germen $(\mathbb{C}^2, 0)$. Ahora si H es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(X, x_0)$, y dejamos a Γ ser el conjunto de levantamientos $\widetilde{\tau}$ para τ en H. Entonces tenemos que Γ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$ conteniendo a G y existe la sequencia exacta de grupos

$$1 \to G \to \Gamma \to H \to 1$$

Si asumimos que H es un grupo subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(X, x_0)$, por el Lema de Cartan podemos asumir que Γ es un subgrupo finito de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ (actuando linealmente).

Lemma 2.3. *(Lema de Cartan) Si Γ es un subgrupo finito de Aut$(C^n, 0)$, luego existe un nuevo sistema de coordenadas $(z_1, \cdots, z_n) = z$ tal que Γ actua linealmente en el nuevo sistema de coordenadas.*

Proof. [C] □

Por lo tanto la acción de $G \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ es la misma en el nuevo sistema de coordenadas. Por lo que si $X = \mathbb{C}^2/G$, sabemos que X tiene una estructura algebraica como $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]^G)$ y sabemos que existe $f(u,v,w)$ tal que $\mathbb{C}[x,y]^G \cong \mathbb{C}[u,v,w]/(f(u,v,w))$. Luego tenemos que:

Corollary 2.4. *Si H es un subgrupo finito de Aut(X, x_0), H está contenido en el grupo de automorfismos graduados del anillo graduado $\mathbb{C}[x,y]^G = \mathbb{C}[u,v,w]/(f(u,v,w))$, grupo al cual denotaremos por $\widehat{Aut}(X, x_0)$. En particular, $\forall \tau \in H$, $\tau^*(f(u,v,w)) = \lambda f(u,v,w)$ donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ es una raíz de la unidad.*

Remark 2.5. Recordemos que si tuviesemos una T-singularidad, no sería cierto en general que $\mathbb{C}[x,y]^G = \mathbb{C}[u,v,w]/(f(u,v,w))$. En general vamos a tener más relaciones entre los monomios invariantes.

Lo anterior aplica cuando $G \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Por otro lado, sabemos que los grupos finitos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ están clasificados (aunque es dificil encontrar la clasificación en la literatura), por ejemplo una de las maneras de poder hacer esto es primer clasificar los subgrupos finitos de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y luego considerar el homomorfismo sobreyectivo de grupos:

$$\beta \colon \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$
$$(c, A) \mapsto cA$$

Es claro que $\mathrm{Ker}(\beta) = \{(1, I), (-1, I)\}$. Sea G un grupo finito de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ con centro $Z(G)$. Notar que el determinante está relacionado con la condición de G finito, pues para cada $g \in G$, debemos tener que det g es una raíz de la unidad (en otro

caso g tendría orden infinito) y tenemos que det$(cA) = c^2$det$A\ \ \forall c \in \mathbb{C}^*$. Por otro lado, tenemos que $cA = (-c)(-A)$, así $\widetilde{G} = \beta^{-1}(G)$ es un subgrupo de $\mu_{2n} \times \bar{G}'$ donde μ_{2n} es el grupo de $2n$ raíces de la unidad y $\bar{G}'$ es un grupo poliedral binario con centro no trivial y cuya imagen G' en PGL$(2,\mathbb{C})$ (=GL$(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$)) es isomorfa a $G/Z(G)$.
Ya que nosotros estamos interesados en T-singularidades, basta considerar el caso de G abeliano (ciclico en realidad). Es claro que si $G\ \leq$GL$(2,\mathbb{C})$ es un grupo abeliano, entonces es conjugado a un subgrupo de matrices diagonales de la forma (ξ_m^a, ξ_n^b) donde ξ_m y ξ_n son raíces primitivas de la unidad y $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $d = (m, n)$, $m = du$, $n = dv$, $d = kq$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Por el Lemma de Goursat,

$$G \cong \langle \xi_m \rangle \triangle_{\langle \xi_k \rangle} \langle \xi_n \rangle$$

donde el grupo de la derecha es el subgrupo de $\langle \xi_m \rangle \times \langle \xi_n \rangle$ de pares (x, y) tales que $\alpha(x) = \beta(y)$ para algunas sobreyecciones $\alpha \colon \langle \xi_m \rangle \to \langle \xi_k \rangle$ y $\beta \colon \langle \xi_n \rangle \to \langle \xi_k \rangle$ y tenemos que los homomorfismos α y β difieren por un automorfismo del grupo $\langle \xi_k \rangle$ definido por la elección de un nuevo generador, ξ_m^s donde $(s, k) = 1$. En este caso G está dado por la extensión

$$1 \to \langle \xi_m^k \rangle \times \langle \xi_n^k \rangle \to G \to \langle \xi_k \rangle \to 1$$

Es decir, G tiene orden $mn/k = uvkq^2$. Así G consiste de matrices diagonales de la forma (ξ_m^a, ξ_n^b) donde $a \equiv sb \mod k$.

References

[C] F. Catanese, *Automorphisms of rational double points and moduli spaces of surfaces of general type*, Compositio Math. **61** (1987), no. 1, 81–102. MR0879190

[H] E. Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small C_1^2. I*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 357–387, DOI 10.2307/1971050. MR0424831

[LP] Y. Lee and J. Park, *A construction of Horikawa surface via $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothings*, Math. Z. **267** (2011), no. 1-2, 15–25, DOI 10.1007/s00209-009-0608-6. MR2772240