5. Valuaciones y configuraciones test

Durante toda esta seccion k será un cuerpo algebraicamente cerrado de $\mathrm{car}(k) = 0$.

Definición 5.1. Sea K/k una extensión de cuerpos finitamente generada, i.e., tal que su grado de trascendencia $\operatorname{tr.deg} K/k < +\infty$ es finito. Una valuación (a valores reales) es una función $v : K^\times \to \mathbb{R}$ tal que

1. $v(fg) = v(f) + v(g)$ para todos $f, g \in K^\times$, i.e., $v : K^\times \to (\mathbb{R}, +)$ es un morfismo de grupos.
2. $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ para todos $f, g \in K^\times$.
3. $v|_{k^\times} = 0$.

Además definimos $v(0) = +\infty$.

Contexto: Dada una variedad algebraica normal X sobre k, consideraremos $K = K(X)$ el cuerpo de funciones racionales de X, el cual es una extensión finitamente generada de k con $\operatorname{tr.deg} K/k = \dim(X)$. Denotaremos por Val_X el conjunto de todas las valuaciones de la extensión K/k.

Observación 5.2. *Una valuación v de K/k tiene una lista de invariantes asociados.*

1. *El anillo de valuación $\mathscr{O}_v := \{f \in K,\ v(f) \geq 0\}$, anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_v := \{f \in K,\ v(f) > 0\}$.*
2. *El cuerpo residual $k(v) := \mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v$.*
3. *El grado de trascendencia $\operatorname{tr.deg}(v) = \operatorname{tr.deg}_k k(v)$.*
4. *El grupo de valores $\Gamma_v := v(K^\times) \subset \mathbb{R}$ y su* **rango racional** $\operatorname{rat.rk}(v) := \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v \otimes \mathbb{Q})$.

Ejemplo 5.3.

1. Sea $x \in X$ un punto suave de una variedad de dimensión n. Definimos el orden de anulación de una función regular $f \in \mathscr{O}_{X,x} \setminus \{0\}$ en x como

$$\mathrm{ord}_x(f) := \max\{d \in \mathbb{N} | f \in \mathfrak{m}_x^d\}$$

   Podemos extender esta función a una valuación $K^\times \to \mathbb{R}$ definiendo

$$\mathrm{ord}_x(f/g) := \mathrm{ord}_x(f) - \mathrm{ord}_x(g).$$

   En este caso notamos que $\Gamma_v = \mathbb{Z}$ y por tanto $\operatorname{rat.rk}(\mathrm{ord}_x) = 1$.

2. Considerar $X = \mathbb{A}^2_{x,y}$. Dado $f = \sum_{a,b \in \mathbb{N}} c_{a,b} x^a y^b$ donde $c_{a,b} \in k$, definimos la valuación v de $K(x, y)$ mediante

$$v(f) = \min\{a + b\sqrt{2} | c_{a,b} \neq 0\}$$

   Los valores $v(x) = 1, v(y) = \sqrt{2}$ son los pesos de la acción.

3. **Valuaciones divisoriales.** Un divisor E sobre X corresponde a un morfismo propio, birracional $\mu : Y \to X$ con Y nomral y $E \subset Y$ divisor primo. En este caso, el anillo local $\mathscr{O}_{Y,E}$ de E es un anillo de valuación discreta (DVR), cuya valuación asociada es

$$\mathrm{ord}_E : K^\times \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \mathrm{ord}_E(\mu^* f)$$

   , i.e., corresponde a calcular el orden del pullback de funciones regulares a lo largo de la subvariedad E.

Definición 5.4 (centro de una valuación)**.** Si $v \in \mathrm{Val}_X$ es una valuación, el *centro de v* es el punto $\xi \in X$ tal que $v \geq 0$ en $\mathscr{O}_{X,\xi}$ y $v > 0$ en $\mathfrak{m}_\xi$. El centro de la valuación v será denotado $c_X(v)$.

Observación 5.5. *El hecho que $c_X(v)$ exista es equivalente a que $X \to \mathrm{Spec}(k)$ sea propio, y de existir este centro es único si X es una variedad separada (cf. valuative criterions of properness and separatedness).*

Ejemplo 5.6.

1. La valuación ord_x asociada al orden de anulación en un punto suave $x \in X$ es divisorial. En efecto, $\mathrm{ord}_x = \mathrm{ord}_F$ donde F corresponde al divisor excepcional del blowup de X en x. Podemos realizar este cálculo de manera local. Consideremos $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{m}_x \subset \mathscr{O}_{X,x}$ coordenadas locales, y una función $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha u^\alpha \in \mathscr{O}_{X,x}$ donde $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$. Por definición, $d := \mathrm{ord}_x(f) = \mathrm{mín}\{|\alpha|, c_\alpha \neq 0\}$. Consideramos el blowup $\varepsilon : \widetilde{X} := \mathrm{Bl}_x X \to X$ dado por:

$$\widetilde{X} \overset{\text{loc}}{=} \{(u, [y]) \in X \times \mathbf{P}^{n-1} | u_i y_j = u_j y_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n\}$$

En el abierto $y_i \neq 0$ tenemos coordenadas $u_j = u_i y_j$, y el divisor excepcional viene dado por $F = \{u_i = 0\}$. Calculamos que:

$$\varepsilon^* f(x_1, \dots, x_n) = u_i^d \widetilde{f}$$

y $u_i \nmid \widetilde{f}$, de modo que $\mathrm{ord}_F(f) = d$.

2. Si $E \subset X$ es un divisor primo de X con punto genérico $\xi \in X$, la valuación $v = \mathrm{ord}_E$ es tal que $v \geq 0$ en $\mathscr{O}_{X,\xi}$ y $v > 0$ en su ideal maximal.

3. Más generalmente, si $E \subset Y \xrightarrow{\mu} X$ es un divisor sobre X entonces $\overline{c_X(v)} = \mu(E)$.

El ejemplo de valuaciones divisoriales deja la pregunta de cómo se puede caracterizar el hecho de que una valuación sea divisorial. Un teorema de Zariski muestra que esto se puede hacer numéricamente en términos del grado de trascendencia y el rango racional. La demostración de este hecho se desprende de [KM98, Lema 2.45].

Teorema 5.7. *Sea v valuación de K. Entonces v es divisorial si y solo si* $\mathrm{tr.deg}(v) = n - 1$ *y* $\mathrm{rat.rk}(v) = 1$.

Construcción 5.8. Sea $v \in \mathrm{Val}_X$. Dado un fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ podemos dar sentido a $v(s)$ para secciones $s \in H^0(X, L)$. En una vecindad U del centro $\xi = c_X(v)$ podemos trivializar L, i.e., fijar un isomorfismo $L|_U \cong U \times \mathbf{A}^1$ en el cual una sección local $s \in H^0(U, L|_U)$ viene representada por una función regular $s : U \to \mathbf{A}^1$. De esta forma podemos definir $v(s)$ evaluando dicha representación local, lo cual estpa bien definido pues dos trivializaciones de L difieren únicamente por una unidad $a \in k^\times$, y por tanto si s', s'' son dos representaciones locales de una sección s tenemos que $s' = as''$ para cierto $a \in k^\times$, y luego $v(s') = v(as') = v(s'')$.
Además, $v(s) > 0$ si y solo si $s(\xi) = 0$.
De manera similar, podemos evaluar un divisor D en v considerando la valuación de la ecuación local de D en torno a $c_X(v)$.

Dado que el cuerpo de funciones es un invariante birracional, toda configuración test $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ de un par polarizado (X, L) tiene cuerpo de funciones $k(\mathscr{X}) \cong K(X)(t)$ pues $\mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_0 \cong X \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$. Así, es natural estudiar las valuaciones de $K(X)(t)$.

Teorema 5.9 (Desigualdad de Abhyankar generalizada)**.** *Sean $k \subset K' \subset K$ extensiones de cuerpo. Entonces*

$$\mathrm{tr.deg}(v) + \mathrm{rat} \cdot \mathrm{rk}(v) \leq \mathrm{tr.deg}\,(v') + \mathrm{rat.rk}\,(v') + \mathrm{tr.deg}\, K/K'$$

donde $v' = v|_{K'}$ es la restricción de la valuacion v a K'.

Proposición 5.10. *Sea v valuación de $K(X)(t)$. Si v es divisorial, su restricción $r(v) = v|_{K(X)}$ a $K(X)$ es divisorial o trivial.*

Demostración. La desigualdad de Abhyankar implica que

$$\mathrm{tr.deg}(v) + \mathrm{rat.rk}(v) \leq \mathrm{tr.deg}\, r(v) + \mathrm{rat.rk}\, r(v) + 1 \leq n + 1$$

Como v es divisorial, en particular $\mathrm{tr.deg}(v) + \mathrm{rat.rk}(v) = n + 1$, así que

$$\mathrm{tr.deg}\, r(v) + \mathrm{rat.rk}\, r(v) = n$$

Es claro que $\mathrm{rat.rk}\, r(v) \leq \mathrm{rat.rk}\, v = 1$, de donde se concluye. ☐

Observación 5.11. *Hay una acción natural $\mathbf{G}_m \curvearrowright K(X)(t)$ dada por*

$$a \cdot f = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} a^{-\lambda} f_\lambda t^\lambda$$

donde $f = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} f_\lambda t^\lambda$ con $f_\lambda \in K(X)$.

Definición 5.12. Una valuación de $K(X)(t)$ es $\mathbf{G}_m$-equivariante si $v(f) = v(a \cdot f)$ para cada $f \in K(X)(t), a \in \mathbf{G}_m$. Denotamos por $\mathrm{Val}_{X \times \mathbf{A}^1}^{\mathbf{G}_m}$ el conjunto de valuaciones equivariantes de $X \times \mathbf{A}^1$.

Ejemplo 5.13. Sea w una valuación de $K(X)$ y $s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Podemos definir una valuación w_s de $K(X)(t)$ mediante

$$w_s(f) := \text{mín}\{w(f_\lambda) + \lambda s\}$$

donde $f = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} f_\lambda t^\lambda$.

1. Esta valuación es $\mathbf{G}_m$-equivariante, dado que

$$w(a^{-\lambda} f_\lambda) = w(a^{-\lambda}) + w(f_\lambda) = w(f_\lambda) \quad \forall a \in \mathbf{G}_m$$

2. Si w tiene centro en X entonces

$$c_{X \times \mathbf{A}^1}(w_s) = \begin{cases} c_X(w) \times 0 & \text{si } s > 0 \\ c_X(w) \times \mathbf{A}^1 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Notemos que hay una biyección entre las valuaciones X y las valuaciones $\mathbf{G}_m$-equivariantes de $X \times \mathbf{A}^1$, dada por explícitamente por

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Val}_X \times \mathbb{R} & \longleftrightarrow & \operatorname{Val}_{X \times 1}^{\mathbf{G}_m} \\ (w, s) & \longmapsto & w_s \\ (v|_{K(X)}, v(t)) & \longleftarrow & v \end{array}$$

Sea ahora $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ configuración test normal de (X, L). Tenemos un mapeo birracional $\mathscr{X} \to X \times \mathbf{A}^1$ con, y definiendo $\mathscr{Y}$ como la normalización del grafo de este mapeo tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{Y} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathscr{X} \arrow[rr, dashed] & & X \times \mathbf{A}^1 \end{tikzcd}$$

y dada $E \subset \mathscr{X}_0$ componente irreducible de $\mathscr{X}_0$, esta induce una valuación divisorial ord_E del cuerpo $K(X)(t)$, cuya restricción a $K(X)$ será denotada $v_E = r(\operatorname{ord}_E)$.

Proposición 5.14. *Para $m > 0$ suficientemente grande*

$$F^\lambda_{\mathscr{X},\mathscr{L}} H^0(X, mL) := \bigcap_{E \subset \mathscr{X}_0} \left\{ s \in H^0(X, mL) \mid v_E(s) + m \operatorname{ord}_E(D) \geq \lambda \operatorname{ord}_E(t) \right\}$$

donde D denota el $\mathbb{Q}$-divisor de $\mathscr{Y}$ soportada en $\mathscr{Y}_0$ tal que $f^*\mathscr{L} \cong g^*(L \times \mathbf{A}^1) + D$.

Demostración. Recordemos que la filtración de $H^0(X, mL)$ definida anteriormente corresponde por definición a

$$F^\lambda_{\mathscr{X},\mathscr{L}} H^0(X, mL) = \left\{ s \in H^0(X, mL) \mid t^{-\lambda} \overline{s} \in H^0(\mathscr{X}, m\mathscr{L}) \right\}$$

donde $\overline{s} \in H^0(\mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_0, m\mathscr{L})$ denota la sección $\mathbf{G}_m$-invariante tal que su restricción a $t = 1$ es $\overline{s}_1 = s$. Al mismo tiempo, define una sección racional de $L_{\mathbf{A}^1} = L \times \mathbf{A}^1$, las cuales denotamos $\overline{s}_{m\mathscr{L}}$ y $\overline{s}_{mL_{\mathbf{A}^1}}$. Ahora, como X es normal, $\overline{s}t^{-\lambda} \in H^0(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ si y solo si $\operatorname{ord}_E(\overline{s}t^{-\lambda}) \geq 0$ para todo E componente irreducible de $\mathscr{X}_0$. Calculamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_E\left(\overline{s}t^{-\lambda}_{m\mathscr{L}}\right) = \operatorname{ord}_E\left(\overline{s}_{m\mathscr{L}}\right) - \lambda \operatorname{ord}_E(t) &= \operatorname{ord}_E(\overline{s}_{f^*m\mathscr{L}}) - \lambda \operatorname{ord}_E(t) \\ &= \operatorname{ord}_E(\overline{s}_{g^*mL_1(D)}) - \lambda \operatorname{ord}_E(t) \\ &= \operatorname{ord}_E(\overline{s}_{g^*mL_1}) + m \operatorname{ord}_E(D) - \lambda \operatorname{ord}_E(t) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} v_E(s) + m \operatorname{ord}_E(D) - \lambda \operatorname{ord}_E(t) \end{aligned}$$

$\square$