6. Criterios numéricos para K-estabilidad

Sea (X, L) una variedad proyectiva normal polarizada de $\dim(X) = n$, y $(\mathscr{X}, \mathscr{L}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}^1$ una configuración test.

Recuerdo 6.1. Vimos que $F \subseteq \mathscr{X}_0$ componente irreducible define una valuación divisorial $\mathbf{G}_m$-equivariante $\operatorname{ord}_E \in \operatorname{Val}^{\mathbf{G}_m}_{X\times\mathbf{A}^1}$ y definimos $v_F := \operatorname{ord}_F|_{K(X)}$. Además, normalizando el grafo de la aplicación racional natural entre $\mathscr{X}$ y la configuración test trivial obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{Y} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathscr{X} \arrow[rr, dashed] & & X \times \mathbf{A}^1 \end{tikzcd} \qquad \text{donde } f^*\mathscr{L} \simeq g^*L_{\mathbf{A}^1} + D \text{ con } \operatorname{Supp}(D) \subseteq \mathscr{Y}_0.$$

Así, $F^{\lambda}_{\mathscr{X},\mathscr{L}} \operatorname{H}^0(X, mL) = \bigcap_{E\subset\mathscr{X}_0}\{s \in \operatorname{H}^0(X, mL),\ \operatorname{ord}_F(\bar{s}t^{-\lambda}) \overset{\text{def}}{=} v_F(s) + \overbrace{m\operatorname{ord}_F(D)}^{=\lambda_1 \text{ fijo}} - \overbrace{\lambda\operatorname{ord}_F(t)}^{=\lambda_2 \text{ fijo}} \geq 0\}$.

Definición 6.2. Sea $v = \operatorname{ord}_E : K(X)^* \to \mathbf{Z}$ valuación divisorial inducida por un divisor primo $E \subseteq Y \xrightarrow{\mu} X$. Entonces, v filtra el álgebra $R := R(X, L) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{m\geq 0} \operatorname{H}^0(X, mL)$ al definir

$$F^{\lambda}_v \operatorname{H}^0(X, mL) := \{s \in \operatorname{H}^0(X, mL),\ v(s) \geq \lambda\}.$$

Atención. La caracterización numérica de valuaciones divisoriales de Zariski **no** sólo considera valuaciones sobreyectivas. Más precisamente, si $v : K(X)^* \to \mathbf{Z}$ divisorial y $\operatorname{Im}(v) = c\mathbf{Z}$ con $c \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ entonces $v = c\operatorname{ord}_E$. Así, en la definición anterior, $v(s) \geq \lambda$ si y sólo si $\operatorname{ord}_E(s) \geq \lceil \frac{\lambda}{c} \rceil$.

Definición 6.3 (K. Fujita)**.** Decimos que $v = c\operatorname{ord}_E$ (o que el divisor E) es **dreamy** si $F^{\bullet}_v R(X, L)$ es finitamente generada, i.e., el álgebra de Rees $\operatorname{Rees}(F^{\bullet}_v R) \cong \bigoplus_{m\in\mathbf{N},\, \lambda\in\mathbf{Z}} \operatorname{H}^0(Y, m\mu^*L - \lceil \frac{\lambda}{c} \rceil E)$ es finitamente generada.

Ejemplo 6.4 (BCHM, 2010)**.** Si Y es **log-Fano** (i.e., existe $\Delta_Y \geq 0$ efectivo con coeficientes ≤ 1 tal que (Y, Δ_Y) es klt[5] y $-(K_Y + \Delta_Y)$ amplio), entonces todo divisor $E \subseteq Y$ es dreamy (Y es un **Mori Dream Space**).

Teorema 6.5. *Sea (X, L) con X Fano klt y $L = -K_X$. Entonces, hay una biyección entre:*

1. *Configuraciones test normales $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ de (X, L) con $\mathscr{L} = -K_{\mathscr{X}/\mathbf{A}^1}$ y $\mathscr{X}_0$* **reducida e irreducible**.
2. *$v : K(X)^* \to \mathbf{Z}$ valuación divisorial* **dreamy**.

Demostración. (1) $\mapsto$ (2) está dado por $\mathscr{X}_0 \mapsto v_{\mathscr{X}_0} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}|_{K(X)}$. Aquí, $\mathscr{L} \cong -K_{\mathscr{X}/\mathbf{A}^1}$ y la filtración inducida en $R = R(X, L)$ está dada por $F^{\lambda}_{\mathscr{X},\mathscr{L}} \operatorname{H}^0(X, mL) = \{s \in \operatorname{H}^0(X, mL),\ v_{\mathscr{X}_0}(s) + m\operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(D) \geq \lambda\operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(t)\}$ con $\operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(D) := -A$, $\operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(t) \overset{\text{def}}{=} 1$, i.e., $F^{\lambda}_{\mathscr{X},\mathscr{L}} \operatorname{H}^0(X, mL) = F^{\lambda+mA}_{v_{\mathscr{X}_0}} \operatorname{H}^0(X, mL)$ y $R_{(\mathscr{X},\mathscr{L})} := \operatorname{Rees}(F^{\bullet}_{\mathscr{X},\mathscr{L}} R) \cong \operatorname{Rees}(F^{\bullet}_{v_{\mathscr{X}_0}} R)$ como $k[t]$-álgebras. Como $R_{(\mathscr{X},\mathscr{L})}$ es finitamente generada, entonces $v_{\mathscr{X}_0}$ es una valuación dreamy.

(2) $\mapsto$ (1) está dada por $v \mapsto \mathscr{X} := \operatorname{Proj}_{\mathbf{A}^1}(\operatorname{Rees}(F^{\bullet}_v R))$. Aquí, $\mathscr{X}_0$ está dada por el Proj del álgebra

$$\operatorname{Rees}(F^{\bullet}_v R) \otimes_{k[t]} k[t]/\langle t\rangle \cong \frac{\operatorname{Rees}(F^{\bullet}_v R)}{t \cdot \operatorname{Rees}(F^{\bullet}_v R)} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{m\in\mathbf{N},\, \lambda\in\mathbf{Z}} \frac{F^{\lambda}_v \operatorname{H}^0(X, mL)}{F^{\lambda+1}_v \operatorname{H}^0(X, mL)} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{m\in\mathbf{N},\, \lambda\in\mathbf{Z}} \operatorname{gr}^{\lambda}_{F_v} \operatorname{H}^0(X, mL).$$

Dado que si $\bar{s}, \bar{t} \neq 0$ tienen grados λ y μ, respectivamente, entonces $\bar{s}\bar{t}$ es no-nulo de grado $\lambda + \mu$, deducimos que $\mathscr{X}_0$ es irreducible y reducida. En particular, dado que X es normal, tenemos que $\mathscr{X}$ es irreducible y normal. Por último, la construcción anterior implica que $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ cumple que $v_{\mathscr{X}_0} = v$. □

Atención. En el contexto anterior:

1. Como $\mathscr{L} = -K_{\mathscr{X}/\mathbf{A}^1}$ y $K_{\mathbf{A}^1} = 0$ entonces $D \overset{\text{def}}{=} -g^*(L_{\mathbf{A}^1}) + f^*\mathscr{L} \overset{\text{def}}{=} g^*(K_{X\times\mathbf{A}^1}) - f^*(K_{\mathscr{X}}) \pm K_{\mathscr{Y}} \overset{\text{def}}{=} K_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}} - K_{\mathscr{Y}/(X\times\mathbf{A}^1)}$. Luego, si $\widetilde{\mathscr{X}_0} = f^*\mathscr{X}_0$ entonces se calcula que por definición de (log-)discrepancia

$$-A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(D) = \overbrace{\operatorname{coeff}_{\widetilde{\mathscr{X}_0}}(K_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}})}^{\overset{\text{def}}{=} 0} - \operatorname{coeff}_{\widetilde{\mathscr{X}_0}}(K_{\mathscr{Y}/(X\times\mathbf{A}^1)}) \overset{\text{def}}{=} -(A_{X\times\mathbf{A}^1}(\widetilde{\mathscr{X}_0}) - 1) = 1 - (cA_X(E) + \overbrace{\operatorname{ord}_{\mathscr{X}_0}(t)}^{\overset{\text{def}}{=} 1}),$$

   y con ello $A = cA_X(E) \overset{\text{def}}{=} A_X(v_{\mathscr{X}_0})$, donde $v_{\mathscr{X}_0} = c\operatorname{ord}_E$ valuación divisorial en X inducida por $\mathscr{X}_0$.

2. Li y Xu (2014) prueban que basta chequear K-estabilidad de variedades de Fano considerando **configuraciones test especiales** $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$, i.e., aquellas con $\mathscr{L} = -K_{\mathscr{X}/\mathbf{A}^1}$ y $\mathscr{X}_0$ una variedad de Fano klt.

[5] i.e., el par (Y, Δ_Y) es dlt.

Definición 6.6 (Invariante β)**.** Sea X variedad de Fano klt y $r \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ tal que $-rK_X$ es Cartier. Para $v := c\,\mathrm{ord}_E : K(X)^* \to \mathbf{Z}$ valuación divisorial, definimos el invariante $\beta(v) := A_X(v) - S_X(v)$, donde

$$S_X(v) = \limsup_{m\to+\infty} \frac{\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda \dim \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mrK_X)}{m \dim \mathrm{H}^0(X, -mrK_X)}$$

y donde $A_X(v) = cA_X(E)$, con $A_X(E)$ la log-discrepancia del divisor $E \subseteq Y \xrightarrow{\mu} X$.

Proposición 6.7. *Sea $v = c\,\mathrm{ord}_E$ (i.e., $v = v_{\mathscr{X}_0} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{ord}_{\mathscr{X}_0}|_{K(X)}$) valuación dreamy y $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ la configuración test asociada, con $\mathscr{X}_0$ reducido e irreducible. Entonces, $\mathrm{DF}(\mathscr{X}, \mathscr{L}) = A_X(v) - S_X(v) = c(A_X(E) - S_X(E))$.*

Demostración. Sea $(\overline{\mathscr{X}}, \overline{\mathscr{L}}) \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathbf{P}^1$ la configuración test proyectiva asociada. Al considerar $L = -K_X$ y $\overline{\mathscr{L}} = -K_{\overline{\mathscr{X}}/\mathbf{P}^1}$ la fórmula para el invariante de Donaldson-Futaki usando $w_m/mN_m = F_0 + F_1 m^{-1} + \cdots$ se reduce a

$$\mathrm{DF}(\mathscr{X}, \mathscr{L}) \overset{\mathsf{def}}{=} -2F_1 = -\frac{1}{(n+1)(-K_X)^n}(-K_{\overline{\mathscr{X}}/\mathbf{P}^1})^{n+1} \overset{\mathsf{def}}{=} -\frac{b_0}{a_0} \overset{\mathsf{def}}{=} -F_0.$$

Y el término F_0 se calcula símplemente observando que si $v = v_{\mathscr{X}_0} = c\,\mathrm{ord}_E$ entonces

$$w_m \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{wt}\,\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_0, -mK_{\mathscr{X}/\mathbf{A}^1}|_{\mathscr{X}_0}) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda \dim \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_{\mathscr{X},\mathscr{L}}} \mathrm{H}^0(X, -mK_X) = \sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda \dim \mathrm{gr}^{\lambda+mA}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mK_X)$$

$$= \sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} (\lambda - mA) \dim \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mK_X) = -mA_X(v) \underbrace{\dim \mathrm{H}^0(X, -mK_X)}_{\overset{\mathsf{def}}{=} N_m} + \sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda \dim \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mK_X)$$

y luego $-F_0 = -\limsup_{m\to+\infty} \frac{w_m}{mN_m} = A_X(v) - S_X(v)$. □

Teorema 6.8. *Si X variedad de Fano klt de $\dim(X) = n$ y $E \subseteq Y \xrightarrow{\mu} X$ es un divisor primo sobre X entonces*

$$S_X(E) = \frac{1}{(-K_X)^n} \int_0^{\tau} \mathrm{vol}(-\mu^* K_X - tE)\,\mathrm{d}t \text{ donde } \tau = \sup\{t \in \mathbf{R}^{\geq 0},\ -\mu^*K_X - tE \text{ divisor big}\}.$$

Demostración. Sea $v = \mathrm{ord}_E$ y supongamos que $-K_X$ es Cartier (para evitar escribir $-rK_X$ en toda la prueba). Si $v_\lambda := \dim F^{\lambda}_v \mathrm{H}^0(X, -mK_X)$, obtenemos una suma telescópica que calcula $\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda\, \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mK_X)$

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda(v_\lambda - v_{\lambda+1}) = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} v_\lambda \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{\lambda=1}^{+\infty} h^0(Y, -m\mu^*K_X - \lambda E) \overset{\mathsf{def}}{=} \int_0^{+\infty} h^0(Y, -m\mu^*K_X - \lceil t \rceil E)\,\mathrm{d}t,$$

y así $\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}} \lambda\, \mathrm{gr}^{\lambda}_{F_v} \mathrm{H}^0(X, -mK_X) = m\int_0^{+\infty} h^0(Y, -m\mu^*K_X - \lceil mt \rceil E)\,\mathrm{d}t$. Luego, $S_X(E)$ está dado por

$$\limsup_{m\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{h^0(Y, -m\mu^*K_X - \lceil mt \rceil E)/(m^n/n!)}{h^0(X, -mK_X)/(m^n/n!)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{vol}(-\mu^*K_X - tE)}{\mathrm{vol}(-K_X)}\,\mathrm{d}t \overset{\mathsf{def}}{=} \int_0^{\tau} \frac{\mathrm{vol}(-\mu^*K_X - tE)}{(-K_X)^n}\,\mathrm{d}t$$

por Teorema de Convergencia Dominada. □

Lo anterior se resume en el siguiente resultado fundamental[6], por Chi Li (2017) y Kento Fujita (2019).

Teorema 6.9 (Criterio valuativo de K-estabilidad)**.** *Sea X una variedad de Fano klt. Entonces, X es*

K-estable (resp. K-semiestable) $\Leftrightarrow$ $\beta_X(E) > 0$ (resp ≥ 0) para todo divisor (dreamy) E sobre X.

Ejemplo 6.10. Sea $X := \mathrm{Bl}_p(\mathbf{P}^2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{P}^2$ con divisor excepcional $E \subseteq X$ y sea L el pullback de una recta. Entonces, $K_X = \varepsilon^* K_{\mathbf{P}^2} + E = -3L + E$ y luego calculamos $S_X(E)$ mediante

$$S_X(E) = \frac{1}{(-K_X)^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(-K_X - tE)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\tau} \mathrm{vol}(3L - E - tE)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (9 - (1+t)^2)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{6}.$$

Dado que E y X son suaves, $A_X(E) = 1$ y así $\beta_X(E) = 1 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6} < 0$. Así, X **no es** K-semiestable (y luego tampoco K-poliestable) y por ende $\mathrm{Bl}_p(\mathbf{P}^2)$ **no posee** métricas de Kähler-Einstein.

Ejemplo 6.11 (K. Fujita, 2015)**.** Sea X variedad de Fano klt K-semiestable y sea $p \in X$ punto suave. Sea $\varepsilon : Y := \mathrm{Bl}_p(X) \to X$ con divisor excepcional $E \subseteq Y$, donde $A_X(E) = (n-1) + 1 = n$ y donde se verifica[7] que $\mathrm{vol}_Y(\varepsilon^*(-K_X) - tE) \geq (-K_X)^n - t^n$ y con ello $\beta_X(E) = A_X(E) - S_X(E) = n - S_X(E) \geq 0$ equivale a

$$n \geq \frac{1}{(-K_X)^n} \int_0^{\infty} \mathrm{vol}_Y(\varepsilon^*(-K_X) - tE)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(-K_X)^n} \int_0^{\sqrt[n]{(-K_X)^n}} ((-K_X)^n - t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{(-K_X)^n}$$

y con ello tenemos que X verifica la desigualdad $(-K_X)^n \leq (n+1)^n$.

Observación 6.12. *La desigualdad $(-K_X)^n \leq (n+1)^n$ es verdad para toda variedad de Fano suave de $\dim(X) = n \leq 3$, pero $X = \mathbf{P}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(n))$ no la verifica para $n \geq 4$ (y luego no es K-semiestable). Más aún, usando resultados de Yuchen Liu y Ziquan Zhuang (2018) se puede probar que en el caso K-semiestable la igualdad $(-K_X)^n = (n+1)^n$ equivale a que $X \cong \mathbf{P}^n$.*

[6]Nuestros cálculos, junto con el Teorema de Li-Xu (2014), permiten probarlo para divisores dreamy. Por otra parte, Blum, Liu, Xu y Zhou prueban en 2019 que si $\beta_X(E) < 0$ para un divisor arbitrario E, entonces dicha desigualdad vale para un divisor dreamy.

[7]Basta comparar dimensiones en la sucesión exacta $0 \to \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mK_X) \cdot \mathfrak{m}_p^{mt}) \to \mathrm{H}^0(X, -mK_X) \to \mathscr{O}_X/\mathfrak{m}_p^{mt} \to 0$.