7. Invariantes α y δ

En esta sección se ilustrarán dos técnicas diferentes para probar K-estabilidad, para las cuales se introducirán los invariantes α y δ.

Construcción 7.1 (Fujita–Odaka 2016, Blum–Jonsson 2020)**.** El criterio valuativo de K-estabilidad dice que una variedad de Fano klt es K-estable (resp. K-semiestable) $\Leftrightarrow \delta(X) > 1$ (resp. ≥ 1), donde:

$$\delta(X) := \inf_{E \subseteq Y \xrightarrow{\mu} X} \frac{A_X(E)}{S_X(E)},$$

i.e., el ínfimo es tomado sobre todos los divisores sobre X. El **invariante** δ fue originalmente definido por Fujita-Okada como cierto límite de **log-canonical thresholds** de *divisores de tipo m-base* y luego Blum-Jonsson probaron que coincidía con la expresión anterior, y además verifica:

$$\frac{n+1}{n}\alpha(X) \leq \delta(X) \leq (n+1)\alpha(X),$$

donde $n = \dim(X)$ y donde

$$\alpha(X) = \inf\{\mathrm{lct}(X, D),\ 0 \leq D \sim_{\mathbf{Q}} -K_X\}$$

es el **invariante** α de Tian, donde a su vez

$$\mathrm{lct}(X, D) = \sup\{c \in \mathbf{R}^{\geq 0},\ (X, cD) \text{ es lc }\}.$$

Teorema 7.2 (Tian, 1987)**.** *Sea X variedad Fano klt de dimensión $n = \dim(X)$. Si*

$$\alpha(X) > (\geq)\ \frac{n}{n+1}$$

entonces X es K-(semi) estable.

Ejemplo 7.3. Utilizaremos el criterio de Tian para probar que una superficie de del Pezzo de grado 1 X es K-estable. Recordemos que $X \cong \mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_8}(\mathbf{P}^2)$ es el blow-up de $\mathbf{P}^2$ en 8 puntos en posición general[8]. Denotando $\varepsilon : X \to \mathbf{P}^2$ el blow-up, el divisor canónico corresponde a:

$$-K_X = \varepsilon^*(-K_{\mathbf{P}^2}) - \sum_{i=1}^{8} E_i$$

donde E_i son los divisores excepcionales. Así, el sistema lineal $|-K_X|$ corresponde al sistema lineal de (transformadas estrictas) de cúbicas pasando por $p_1, \ldots, p_8$.

Consideremos $D \sim_{\mathbf{Q}} -K_X$ (i.e., existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $mD \sim (-K_X)$ son linealmente equivalentes) y notemos que entonces D es reducido (i.e., solo puede poseer multiplicidades 1). En efecto, si $\mathrm{Supp}(D) \in |-K_X|$ se tiene directamente pues $D \sim \mathrm{Supp}(D)$ (pensando $\mathrm{Supp}(D)$ como ciclo). Si $\mathrm{Supp}(D) \notin |-K_X|$, como $-K_X$ es libre de puntos de base, dado $x \in D$ existe $C \in |-K_X|$ con $x \in D$. Luego

$$D \cdot C = (-K_X)^2 = 1$$

y por tanto D necesariamente es reducido. Este hecho implica que basta calcular el lct cuando D es una curva. La condición de permanecer en $p_1, \ldots, p_8$ implica que D es irreducible, y luego las posibilidades se reducen a:

$$D \text{ suave: } \mathrm{lct}(X, D) \overset{\text{def}}{=} \sup\{c \in \mathbf{R}^{\geq 0},\ 1 - \mathrm{ord}_E(cD) \geq 0\} = 1$$

$$D \text{ nodal: } \mathrm{lct}(X, D) = 1$$

$$D \text{ cúspide: } \mathrm{lct}(X, D) = \frac{5}{6}$$

El caso de la cúspide se obtiene haciendo una resolución del par $(\mathbb{A}^2, D)$ donde $D = \{y^2 - x^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$. Si $f : \widetilde{X} \to X$ es dicha resolución (que corresponde a 3 blow-ups) entonces

$$f^*(cD) - K_{\widetilde{X}/X} = c\widetilde{D} + (2c-1)E_1 + (3c-2)E_3 + (6c-4)E_3$$

y el lct se obtiene de la condición $6c - 4 \leq 1$. En cualquier caso, $\alpha(X) > 2/3$ y por lo tanto X es K-estable.

Observación 7.4. *Cheltsov (2008) muestra que $\alpha(X) \geq 2/3$ para toda superficie de del Pezzo de grado ≤ 4. Fujita (2019) muestra que $\alpha(X) = \frac{n}{n+1}$ implica K-estabilidad para variedades de Fano* suaves.

[8]Esto significa que no hay 3 puntos colineales, no hay 6 puntos que pertenezcan a una cónica, y no hay una cúbica nodal o cuspidal pasando por los 8 puntos de tal suerte que uno de ellos sea exactamente el punto singular.

Usando el lenguaje de filtraciones, valuaciones, y cuerpos de Newton-Okounkov, Abban y Zhuang (2022) prueban uno de los métodos más usados actualmente para estimar el invariante δ vía *adjunción.* La primera observación es que el criterio valuativo permite extender la definición de K-estabilidad a pares log Fano.

Definición 7.5. Dado (X, D) par log Fano de dimensión $n = \dim(X)$ y $E \subset Y \xrightarrow{\mu} X$ divisor sobre X, definimos

$$\delta_{(X,D)}(E) = \frac{A_{(X,D)}(E)}{S_{(X,D)}(E)}$$

donde

$$S_{(X,D)}(E) = \frac{1}{(-K_X - D)^n} \int_0^{\infty} \mathrm{vol}(\mu^*(-K_X - D) - tE)\, \mathrm{d}t$$

Decimos que (X, D) es K-estable (resp. K-semiestable) si

$$\delta(X, D; V_\bullet) = \mathrm{ínf}\{\delta_{(X,D)}(E), E \subset Y \xrightarrow{\mu} X \text{ divisor sobre } X\} > 1\ (\geq 1).$$

Observación 7.6. *Si X es una variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio, $V_\bullet := \{V_m = \mathrm{H}^0(X, mL)\}_{m\geq 0}$ es la serie lineal asociada, y si $E \subset Y \to X$, se define la filtración $(\mathscr{F}_E V_m)_t := \{s \in V_m, \mathrm{ord}_E(s) \geq mt\}$ y*

$$\mathrm{vol}(\mathscr{F}_E V_m)_t = \lim_{m\to+\infty} \frac{\dim((\mathscr{F}_E V_m)_t)}{m^n/n!}$$

Entonces

$$S(V_\bullet, E) := \frac{1}{\mathrm{vol}(V_\bullet)} \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(\mathscr{F}_E V_m)_t \, \mathrm{d}t = S_{(X,D)}(E),$$

considerando $L = -K_X - D$.

Construcción 7.7 (Abban-Zhuang, 2022)**.** Sea (X, Δ) par klt con $\Delta \geq 0$, y sea $E \subseteq Y \xrightarrow{\mu} X$ un divisor sobre X de **tipo plt**, i.e., $-E$ es μ-amplio y $(Y, \Delta_Y + E)$ es un par plt[9], donde Δ_Y está definido por la condición

$$K_Y + \Delta_Y = \mu^*(K_X + \Delta) + (A_{(X,\Delta)}(E) - 1)E.$$

Si Δ_E es el **diferente** de Δ_Y en E (es decir, $K_E + \Delta_E = (K_Y + \Delta_Y + E)|_E$) entonces

$$\delta_Z(X, \Delta; V_\bullet) = \inf_{F,\ Z\subseteq \overline{c_X(F)}} \frac{A_{(X,\Delta)}(F)}{S(V_\bullet, F)} \ \text{ verifica } \ \delta_Z(X, \Delta; V_\bullet) \geq \mathrm{mín}\left\{\frac{A_{(X,\Delta)}(E)}{S(V_\bullet, E)}, \inf_{Z'} \delta_{Z'}(E, \Delta_E; \mathbf{W}^E_{\bullet,\bullet})\right\}$$

con $Z' \subset Y$ recorriendo las subvariedades de Y tales que $\mu(Z') = Z$, y donde

$$\delta_{Z'}(E, \Delta_E; \mathbf{W}^E_{\bullet,\bullet}) = \inf_{F,\ Z'\subseteq \overline{c_E(F)}} \frac{A_{(E,\Delta_E)}(F)}{S(\mathbf{W}^E_{\bullet,\bullet}; F)}.$$

El término $S(\mathbf{W}^E_{\bullet,\bullet}; F)$ se obtiene de manera análoga a $S(V_\bullet, E)$ pero considerando el refinamiento

$$W^E_{m,j} := \mathrm{Im}(\mathrm{H}^0(Y, -m(K_X + \Delta) - jE) \to \mathrm{H}^0(E, -m(K_E + \Delta_E) - jE|_E)).$$

En la práctica, este volumen puede calcularse o estimarse usando la noción de *restricted volume* definida por Lazarsfeld y sus colaboradores, que a su vez se demuestra que puede calcularse usando *slices* de cuerpos de Newton-Okounkov. Esto último, en el caso de superficies, se calcula usando la *descomposición de Zariski.*

Observación 7.8. *Por definición, $\delta(X, D; V_\bullet) = \mathrm{ínf}_{Z\subset X}\, \delta_Z(X, D; V_\bullet)$. En particular, la condición $\delta_p(X, D; V_\bullet) \geq 1$ para todo $p \in X$ implica que X es K-semiestable.*

De ahora en adelante, X será una **superficie** y $E \subset Y \to X$ una curva suave[10] X fija. En este caso Z' (el cual es una subvariedad en E) será un punto $Z' = p$ tal que $p \in \overline{c_E(F)}$, i.e., $p = F$. Necesitamos calcular

$$\delta_p(E, D_E, W^E_{\bullet,\bullet}) = \frac{A_{(E,D_E)}(p)}{S(W^E_{\bullet,\bullet}; p)} = \frac{1 - \mathrm{ord}_p(D_E)}{S(W^E_{\bullet,\bullet}; p)}$$

donde hemos usado que E es suave. Sea $\tau = \sup\{u \in \mathbf{R}^{\geq 0}, \mu^*(-K_X - D) - uE$ es pseudoefectivo$\}$, y consideremos la descomposición de Zariski

$$\mu^*(-K_X - D) - uE = \underbrace{P(u)}_{\text{nef}} + \underbrace{N(u)}_{\text{negativo}}.$$

[9]Recordar que (X, Δ) es plt (resp. klt) si para $A_{X,\Delta}(E) > 0$ (resp. $A_{X,\Delta}(E) > 0$ y $\lfloor \Delta \rfloor \leq 0$) para todo divisor E sobre X.
[10]Es suficiente considerar curvas suaves debido a la hipótesis plt.

Supondremos que $\mathrm{Supp}(E) \nsubseteq N(u)$ para todo u (sólo por simplicidad). En tal caso, tenemos una *flag* $\{p\} \subset E \subset Y$, cuyo *cuerpo de Newton-Okounkov* permite calcular el volumen del divisor[11]:

$$S(W^E_{\bullet,\bullet}; p) = \frac{\dim(X)}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^{\tau} \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(P(u)|_E - vp)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \frac{2}{(-K_X - D)^2} \int_0^{\tau} \int_0^{+t(u)} \text{máx}\{\mathrm{ord}_p(P(u)|_E) - v, 0\}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u$$

Ejemplo 7.9. Usando el método de Abban-Zhuang probaremos que toda superficie cúbica es K-semiestable. Sea X superficie cúbica, $p \in X$ y $E \in |-K_X|$ curva elíptica (suave) tal que $p \in E$ y tal que $E|_E = 3p$. Aquí, $D = 0$ y por suavidad $A_X(E) = 1$. Calculamos

$$S_X(E) = \frac{1}{(-K_X)^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(-K_X - tE) dt = \frac{1}{(-K_X)^2} \int_0^1 (-K_X)^2 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Notar ahora que

$$-K_X - uE \sim (1-u)(-K_X) \text{ es nef } \iff (1-u)(-K_X) \text{ es pseudoefectivo } \iff 0 \leq u \leq 1.$$

En este caso $P(u) = (1-u)(-K_X)$ y $N(u) = 0$, y así $P(u)|_E = 3(1-u)p, \mathrm{ord}_p(P(u)|_E) = 3(1-u)$. Luego,

$$S(W^E_{\bullet,\bullet}; p) = \frac{2}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^{\tau} \int_0^{t(u)} \text{máx}\{\mathrm{ord}_p(P(u)|_E) - v, 0\}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^{3(1-u)} (3(1-u) - v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = 1.$$

Calculamos que $\delta_p(E, D_E, W^E_{\bullet,\bullet}) = 1$, y luego

$$\delta_p(X; V_\bullet) \geq \text{mín} \left\{ \frac{A_X(E)}{S_X(E)}, \delta_p(E, \underbrace{\Delta_E}_{=0}; W^E_{\bullet,\bullet}) \right\} = \text{mín}\{3, 1\} = 1.$$

El cálculo anterior concluye que X es K-semiestable.

Observación 7.10. *De hecho, Abban-Zhuang verifican que $\delta(X) \geq 3/2$, y toda superficie cúbica es K-estable.*

[11] Ver Corolario 1.109 en *The Calabi Problem for Fano Threefolds, Cheltsov et al.,2023.*