SGA: [Algebraic Surfaces of General type with small c_1^2. I & II]

Paper I

Para superficies algebraicas de tipo general/$\mathbb{C}$ minimales tenemos la desigualdad

$$c_1^2 \geq 2p_g - 4$$

Donde c_1 es la primera clase de Chern de la superficie y

$$p_g = h^2(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, K_X)$$

Eiji Horikawa describe completamente las superficies complejas minimales que cumplen la igualdad.

El primer argumento clave es, para una sup Horikawa S:

$$|K| : S \longrightarrow \mathbb{P}^n \qquad (n = p_g - 1)$$

Está bien definido, ya que $|K|$ no tiene ptos base.
Ademas el miembro general C de $|K|$ es una curva hiperellip.
Por otro lado, la imagen W del mapa cumple que

$$\deg W \cdot \deg f = K^2 = 2n - 2$$

Como $2K$ induce el canónico de C, tenemos $\deg f \geq 2$.

Por otro lado W no está contenido en un hiperplano, de donde $\deg W \geq n-1$

$$\Rightarrow \quad \deg f = 2 \ , \quad \deg W = n-1$$

Luego se utiliza un Lema importante:

Lema 1 Si W es una superficie irred, no contenida en hip. en $\mathbb{P}^n$ y $\deg W = n-1$, entonces es una de las sgtes. opciones:

(i) $n=2$, $W = \mathbb{P}^2$

(ii) $n=5$, $W = \mathbb{P}^2$ donde $W \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ por $|2H|$ con H una linea en $\mathbb{P}^2$.

(iii) $n \geq 3$, $W = \mathbb{F}_d$ donde $n-3-d$ entero no-negativo par y $W \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ por $\left|\Delta_0 + \frac{(n-1+d)}{2}\Gamma\right|$

(iv) $n \geq 3$, W es un cono sobre una curva racional de grado $n-1$ en $\mathbb{P}^{n-1}$

Esto permite describir las superficies S desde un pto de vista constructivo. Los pasos son

- $R = K_S - f^*K_W$, $B = f_*R$
- Si existe line bundle F en W tq $2B \sim F$ y $R \in |f^*F|$ entonces B no tiene ptos malos (3ple inf. cerca) y S es cubrim doble de W con branch B.

En particular, se entienden bien los branch en cada caso anterior, y el tipo (iv) se puede reinterpretar como cubrimientos 2ble de Hirzebruch en distinto branch (comparado a iii)

De ahí nace la clasificación de Horikawas tipo

(∞): casos chicos, cubrimiento de $\mathbb{P}^2$ $(n=2,5)$

(d): cubrimiento de Hirzebruch $\mathbb{F}_d$ $(n\geq 3)$

(d'): " " " $\mathbb{F}_{n-1}$ $(n=3,4,5)$

El resto del paper se dedica a calcular numero de moduli y tipos de deformación.

Def Dos superficies X, Y tienen el mismo tipo de def. cuando existe sucesión $X=S_0, S_1, \dots, S_n=Y$ tal que S_i y S_{i+1} están en una misma familia analítica de superf.

Prop Esto induce relación de equivalencia (y noción de componentes en el moduli $\mathcal{M}_{K^2,\chi}$)
Además igual tipo de def $\Rightarrow$ diffeo.

Si S es Horikawa tipo (d):

- Solo un tipo de def cuando $c_1^2 \not\equiv 0 \pmod 8$
- Dos tipos de def cuando $c_1^2 \equiv 0 \pmod 8$
  - **NO** son difeo cuando $c_1^2 \equiv 8 \pmod{16}$
  - $\boxed{\text{No se sabe}}$ si son difeo cuando $c_1^2 \equiv 0 \pmod{16}$

* Determinar diffeo en este último caso es el problema Horikawa.

Paper II

Se clasifican y describen superficies alg. minimales /$\mathbb{C}$ cumpliendo la igualdad

$$c_1^2 = 2p_g - 3 \qquad \text{(Eq)}$$

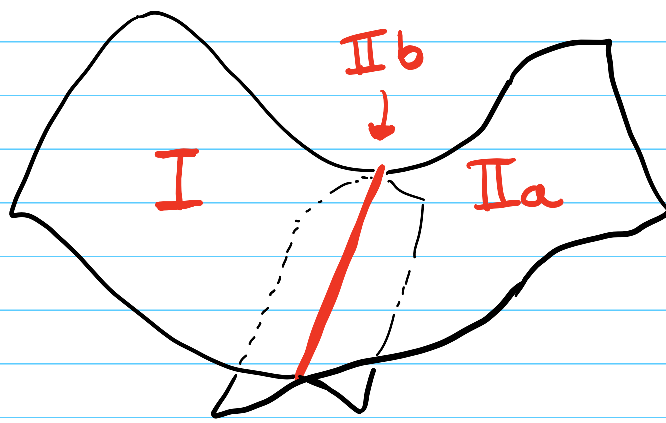
Las mas conocidas cumpliendo esto son las "quínticas numéricas" con

$$c_1^2 = 5 \;,\; p_g = 4 \;,\; q = 0 \quad \text{(como consec de Kodaira)}$$

Están directamente relacionadas con superficies de grado 5 en $\mathbb{P}^3$.

Horikawa demostró en [On deformation of quintic surfaces] que todas estas son realmente deformaciones de quínticas en $\mathbb{P}^3$.

$\mathcal{M}_{5,5}$



componentes I y IIa 40-dim. intersectándose transversalmente en variedad IIb 39-dim

Ej) Considerar $S \subset \mathbb{P}^3$ definida por una quíntica en $\mathbb{P}^3$. Luego H hiperplano, entonces

$$S.H.H = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} S \sim 5H \\ K_X \sim -4H \end{array}}$$

Por otro lado adjunción nos dice

$$K_S = (K_X + S)|_S = H|_S$$

$$\Rightarrow \quad K_S^2 = H|_S \cdot H|_S = H \cdot H \cdot S = 5$$

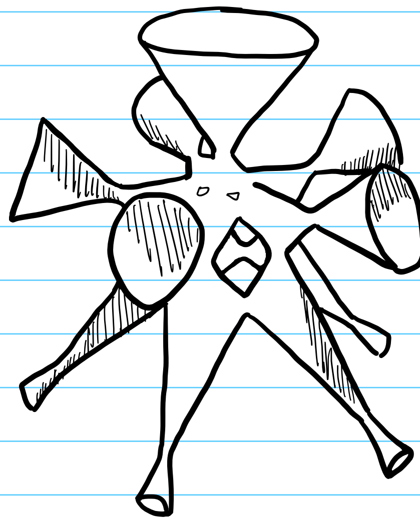
Además $\quad p_g(S) = h^0(S, K_S) = h^0(S, H|_S)$

$$= h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = 4$$

(S NO está contenido en hiperplano)

$$q(S) = h^1(S, K_S) = h^1(S, H|_S) = h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$$

$$= 0$$



Togliatti quintic

En un caso general, se puede describir las sup/$\mathbb{C}$ minimales S cumpliendo la relación para los invariantes de (Eq) generalizando las ideas de clasif de Horikawas.

Problema: El mapa $|K_S| : S \to \mathbb{P}^{p_g - 1}$ está bien definido (y es birracional) sólo cuando S es quíntica en $\mathbb{P}^3$

Solución: Resolver los ptos base del sistema lineal por medio de Blow-ups

$$\pi : S' \to S$$

De manera que $|K_{S'}| : S' \to \mathbb{P}^{p_g - 1}$ si sea clasificable.

En la práctica se utiliza esencialmente el siguiente Lema para separar casos en la clasificación

Lemma 1.1 Sea S sup. min. con haz canónico K. Sea $\pi: \tilde{S} \to S$ composición de blow-ups tal que la parte variable $|L|$ de $|\pi^* K|$ no tiene puntos base. Asumir que el mapa holom. $\Phi_L: \tilde{S} \to \mathbb{P}^n$, $n = p_g - 1$ induce mapa birracional de $\tilde{S}$ a su imagen. Entonces

$$C_1^2 \geq L^2 \geq 3p_g - 7$$

dem. La desig. $C_1^2 \geq L^2$ es siempre cierta, se demuestra en [Quintics]. Para la otra desigualdad sea F la parte fija de $|\pi^* K|$. Sea $\tilde{K}$ el haz canónico de $\tilde{S}$. Luego

$$\tilde{K} = \pi^* K + [E]$$

donde E es suma de divisores excepcionales en $\tilde{S}$. Por Bertini podemos tomar curva irred C en $|L|$. Sea $\mathcal{K}$ el haz canónico de C. Luego por adjunción

$$\mathcal{K} = 2L_c + [E_c] + [F_c] \qquad (1.1)$$

Sea $r = h^0(C, \mathcal{O}(L_c))$, tomar divisor Γ de grado $r-2$ suficientem. general. Como $|L_c|$ define mapa birr. de C a su imagen, podemos encontrar divisores Θ y Θ' en $|L_c|$ t.q. $\inf(\Theta, \Theta') = \Gamma$ y tal que

$$\Theta + \Theta' \text{ disjunto de } E_c + F_c$$

Sea $\Omega(\mathcal{K}-\theta)$, $\Omega(\mathcal{K}-\theta'-E_c-F_c)$ y $\Omega(\mathcal{K}-\Gamma)$ los espacios de func. holom. de $\mathcal{K}$ sobre C que se anulan en

θ , $\theta'+E_c+F_c$, Γ respectivamente

Considerar el mapa lineal

$$\gamma : \Omega(\mathcal{K}-\theta) \oplus \Omega(\mathcal{K}-\theta'-E_c-F_c) \longrightarrow \Omega(\mathcal{K}-\Gamma)$$

$$(\varphi, \varphi') \longmapsto \varphi+\varphi'$$

Suponer que $(\varphi,\varphi') \in \operatorname{Ker}\gamma$. Luego luego φ se anula en $\sup(\theta, \theta'+E_c+F_c)$ que es $\theta+\theta'+E_c+F_c-\Gamma$.

Por (1.1) tenemos que $\operatorname{Ker}\gamma$ es 1-dimensional.
Además:

$$\dim \Omega(\mathcal{K}-\theta) = r - \deg\theta + g - 1$$

$$\dim \Omega(\mathcal{K}-\theta'-E_c-F_c) = r$$

$$\dim \Omega(\mathcal{K}-\Gamma) = g-(r-2)$$

donde g denota el género de C. De aquí se obtiene

$$\deg\theta \geq 3r-4$$

Además $r \geq p_g - 1$, por lo que $L^2 \geq 3p_g - 7$ $\square$

- Por otro lado $|L|$ no es compuesto con pencil y se tiene

$$2p_g - 3 \geq L^2 \geq 2p_g - 4$$

Esto dice que si $\Phi_L : \tilde{S} \to \mathbb{P}^n$ y $f : \tilde{S} \to W$ el mapa inducido a su imagen entonces

$$L^2 = \deg f \cdot \deg W$$

$\Rightarrow \deg W \geq p_g - 2$. Luego tenemos los sgtes. casos

Clasific en [Quintics]

- $p_g = 3$. $\deg f = L^2 = 2$ ó 3.
- $p_g = 4$. $\deg f = 1$ y $L^2 = \deg W = 5$
- $p_g = 4$. $\deg f = 2$, $L^2 = 4$ y $\deg W = 2$
- $p_g \geq 5$. $\deg f = 2$, $L^2 = 2(p_g - 2)$ y $\deg W = p_g - 2$.

§ $p_g \geq 5$

Para este caso se pueden repetir argumentos de [Quintics] y demostrar que solo hay un pto. base en $|K|$ ya que

$$L^2 = K^2 - 1$$

Ademas W es sup de grado $n-1$ en $\mathbb{P}^n$ por lo que se puede usar el mismo lema de Horik.

para interpretar $\tilde{S}$ constructivamente. Además se necesita que contenga una (-1)-curva, esto acota opciones.

Teo Hay 3 casos para construir $\tilde{S}$

Tipo (d) y (d') ← A) Partir con $\mathbb{F}_d$ ($n \geq 2d-2$ y $n-d$ impar)
y hacer blow-ups en dos ptos x, y de una misma fibra (pueden estar inf. cerca)

$$q : \tilde{W} \longrightarrow \mathbb{F}_d$$

$E_x = q^{-1}(x)$, $E_y = q^{-1}(y)$. Luego S es resol. de sing (ADE) de cubrimiento de $\tilde{W}$ con branch

$$f(E) \subset \tilde{B} \in |16 q^* \Delta_0 + (n+4+3d) q^* \Gamma - 4E_x - 4E_y|$$

Tipo (d^*)

B$_1$) Partir con $\mathbb{F}_1$. ($n=4$)
Hacer blow-up en pto x de Δ_0

$$f(E) \subset \quad q : \tilde{W} \longrightarrow \mathbb{F}_1$$

$E_x = q^{-1}(x)$. Luego S es resol de sing ADE de cubrimiento doble de $\tilde{W}$ en Branch

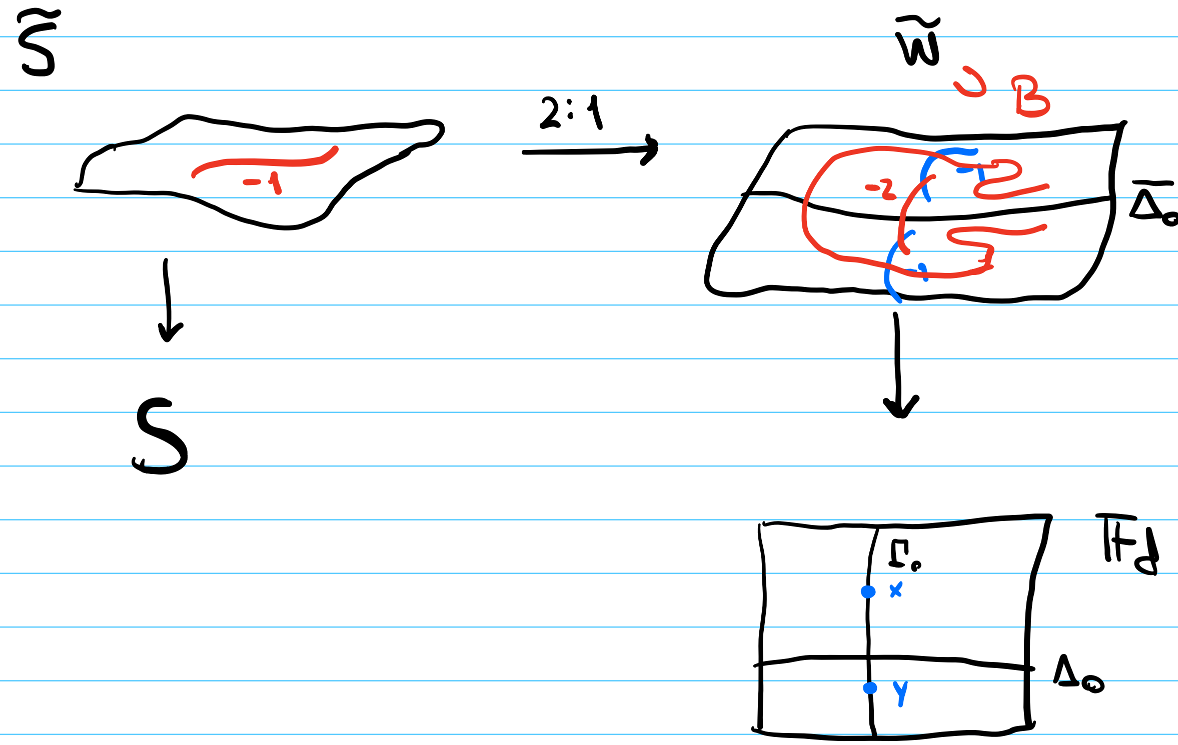
$$\tilde{B} \in |8 q^* \Delta_0 + 10 q^* \Gamma - 4E_x|$$

($n=5$)

B$_2$) S es resol de sing de cubr. doble de $\mathbb{F}_2$ con Branch

$$\Delta_0 \subset B \in |8\Delta_0 + 14\Gamma|$$

Ej Construcción de tipo (d)



(*) En Lemma (1.2) se describe B más generalmente.

Cor Toda sup. S con $c_1^2 = 2p_g - 3$, $p_g \geq 5$ admite fib. hiperelíptica

$$S \to \mathbb{P}^1$$

con estruct. única salvo iso.

§ $P_g = 2$

En este caso se ocupa un mapa inducido por

$|2K|$ → sin ptos. base

tal que $\Phi_{2K} : S \longrightarrow \mathbb{P}^3$ es de grado 2 a una cónica cuádrica en $\mathbb{P}^3$. Salvo estudiar este mapa se puede concluir

Teo) $|K|$ tiene un pto. base que al resolverse entrega $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$. Luego $\tilde{S}$ es res. de sing de cub. doble de $\mathbb{F}_2$ en branch $B \in |6\Delta_0 + 10\Gamma|$

§ $P_g = 3$

En este caso se vuelve a demostrar que $|K|$ tiene a lo más un pto. base y ocupar las técnicas

Teo) S es una de las sgtes.

- una sub-variedad def por ecuación específica en un vector-bundle de rango 2 sobre $\mathbb{P}^2$

- Contracción de (-1)-curva de un cub. doble $\tilde{S} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ con Branch de grado 10 y sing. descritas.

§ Números de moduli

Como entiende construcciones y opciones de Branch se tiene

Teo) Sea S de tipo (d) "genérica". Luego

$$m(S) = h^1(S, \Theta_S) = 7n + 19$$

$p_g = n+1$, $c_1^2 = 2n-1$. Θ_S es el haz de germenes de holomorphic vector fields en S.

Teo) Sea S con $p_g = 2$ y $c_1^2 = 1$ "genérica"

$$m(S) = 28$$

§ Deformaciones

Se entiende según deformar Branch. Muchos cálculos asociados

Teo) Toda S de $p_g \geq 4$ fijo y $c_1^2 = 2p_g - 3$ del mismo tipo (d), (d') o (d*) tiene un solo tipo de def. y el mismo.

Teo Mismo pasa con casos $p_g = 2, 3$.
Aquí solo hay una opción

Teo Se pueden deformar para $p_g \geq 6$
las de tipo (d) con $d \geq 2$ a las de tipo
(d_0) con $d_0 < d$ y $d_0 \equiv d \mod 2$.
Excepto si $p_g \equiv 1 \mod 4$ y $p_g = 2d-1$

Teo Cualquier sup S minimal con $c_1^2 = 2p_g - 3$
tiene solo un tipo de def. si

$(p_g = n+1)$

$$n \not\equiv 0 \mod 4$$

$$n \neq 5$$

Teo Todas son simplemente conexas

Teo Todas tienen mismo tipo de homotopía