Otra Conjetura de los Números de Markov:

Basado en - "Smooth Limits of Plane Curves of Prime Degree and Markov Numbers" de K. DeVleming y D. Stapleton.

Pregunta: ¿Para que dimensión n y grado d es todo límite suave de hipersuperficies $X_t \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ con $t \neq 0$ es una hipersuperficie $X_0 \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$?

Respuesta: No siempre!.

Ejemplo: Si $n=1$. Es cierto para $d = 1,2,3$, pero para $d=4$ no.

Tomamos en $\mathbb{P}(1,1,4)$ la curva hiperelíptica $C = \{ z^2 - f_8 = 0 \} \subseteq \mathbb{P}(1,1,4)$ donde $f_8 \in k[x_0, x_1]_8$ y tiene 8 raíces distintas.

C no cruza el punto singular de $\mathbb{P}(1,1,4)$, este es $[0:0:1]$.

- $\mathbb{P}(1,1,4)$ admite una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein a $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \mathbb{P}(1,1,4)$.

- Además C no tiene obstrucción para deformar $\mathcal{N}_{C|\mathbb{P}(1,1,4)} \cong \omega_C^{\otimes 4}$ y $\deg(\omega_C^{\otimes 4}) > 0$.

$\Rightarrow H^1(C, \mathcal{N}_{C|\mathbb{P}(1,1,4)}) = 0$.

Se demuestra que $C^2 = 16$, en $\mathbb{F}_4$ $C \in |8F + 2\Delta_0|$. Entonces $C_t \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)|$ suave $\forall t \neq 0$.

C no es una curva plana, porque admite cubrimiento $C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$.

- En general si $d = ab$, $a>1$, $b>1$ existe siempre un contraejemplo. (Mori 75)

$$X_t = \{tz - f_a = 0,\ z^b - g_{ab} = 0\} \subseteq \mathbb{P}(\underbrace{1,\dots,1}_{n+1}, z).$$

$f_a \in K[x_0,\dots,x_{n+1}]_a$, $g_{ab} \in K[x_0,\dots,x_{n+1}]_{ab}$ genéricos.

Si $t \neq 0$, $(tz)^b = f_a^b = t^b g_{ab} \Rightarrow X_t \cong \{f_a^b - t^b g_{ab} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$

Si $t = 0$, $X_0 = \{f_a = 0,\ z^b = g_{ab}\} \xrightarrow{b:1} \{f_a = 0\}$.

X_0 tampoco es una hipersuperficie.

Para la charla nos enfocaremos en analizar el siguiente resultado.

Teo A: Si p es un número de Markov primo, entonces $\exists \{C_t\}_{t\in\mathbb{A}^1}$ familia de curvas planas C_t con $t \neq 0$ tal que C_0 es una curva suave no plana.

• ¿Por qué los números de Markov?

Teorema: (Hacking-Prokhorov 10): Si $\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow X_0$ con X_0 Klt, entonces X_0 es una suavización parcial de $\mathbb{P}(a^2,b^2,c^2)$ donde $a^2+b^2+c^2 = 3abc$ (Ecuación de Markov).

• Las soluciones en $\mathbb{Z}^{\geq 1}$ de esta ecuación son los números de Markov. Mediante la mutación $(a,b,c) \to (a,b,3ab-c)$ se obtienen las soluciones de dicha ecuación.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & (1,13,34) \\
 & & & (1,5,13) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
(1,1,1) \arrow[r] & (1,1,2) \arrow[r] & (1,2,5) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (5,13,194) \\
 & & & (2,5,29) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,29,169) \\
 & & & & (5,29,433)
\end{tikzcd}$$

Las degeneraciones de $\mathbb{P}^2$ están "conectadas" a través de las mutaciones de soluciones.
El tipo de isomorfismo de $\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow X_0$ depende de sus singularidades.

Si $(a,b,c) \to (a,b,c' = 3ab - c)$, entonces

$$\mathcal{X}_{s,t} = \{ y_0 y_1 = s y_2^{c'} + t y_3^{c} \} \subseteq \mathbb{P}(a^2, b^2, c, c')$$

Notamos que para $st \neq 0$, se sigue que $\mathcal{X}_{s,t}$ posee las singularidades $\frac{1}{a^2}(1, aw_a - 1)$, $\frac{1}{b^2}(1, bw_b - 1)$. Similarmente, $\mathcal{X}_{0,t} \cong \mathbb{P}(a^2, b^2, (c')^2)$.

$\mathcal{X}_{s,0} \cong \mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$.

Llamamos $M(a_0, a_1, a_2)$ a la superficie con dichos índices locales.

- La siguiente proposición nos garantiza un criterio para extender un divisor $C_0 \subseteq M_0$ a una suavización parcial de M_0.

Prop: i) $\mathrm{Pic}(M_0), \mathrm{Cl}(M_0) = \mathbb{Z}$ con generador positivo $\mathcal{O}_{M_0}(1)$

ii) $0 \to \mathrm{Pic}(M_0) \to \mathrm{Cl}(M_0) \to A \to 0$ donde A es el grupo de clases local de A. Definimos $\alpha^2 = |A|$.

iii) Sea B el local class group de las singularidades suavizadas. $\beta = \sqrt{|B|}$

D_0 se especializa a $M \iff \mathcal{O}_{M_0}(D_0) = \mathcal{O}_{M_0}(m\beta)$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.

(luego de un cambio de base $M \times_T T' \to T'$).

Dem: (Sketch). • De la degeneración $M_0 \rightsquigarrow \mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$, tenemos $\begin{cases} -K_{M_0} \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3abc) \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(|B|) \text{ se especializa} \end{cases}$

$\Rightarrow \beta = \gcd(|B|, 3abc) \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\beta)$ se especializa a $\mathcal{O}_{M_0}(1)$.

Tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{M_0}(\alpha^2)] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{M_0}(1)] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/\alpha^2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(M_0) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(M_0) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

- Sea $\mathcal{O}_{M_0}(D_0) = \mathcal{O}_{M_0}(\nu)$ y suavización $M' \rightsquigarrow M_0$.

Si $\mathcal{O}_{M_0}(D_0)$ se especializa, entonces $\mathcal{O}_{M'}(r) \rightsquigarrow \mathcal{O}_{M_0}(D_0)$

$$\frac{\nu^2}{\alpha^2} = \mathcal{O}_{M_0}(\nu)^2 = \frac{\beta^2 r^2}{\alpha^2} \Rightarrow \boxed{\beta \mid \nu}.$$

□

Prop: i) Si $M \to D$ es una suavización parcial de M_0 y D es un divisor plano sobre D, entonces $h^i(M_t, \mathcal{O}_{M_t}(D_t))$ es cte sobre la familia. $\forall i$.

Obs: Recuerde que si M suaviza $M(a,b,c)$, se sigue que todo divisor plano. $D/_T$ cumple que $h^1(M(a,b,c), \mathcal{O}_{M_0}(D_0)) = 0$. Dado que $\chi(D_t)$ es cte.

Por semicontinuidad se sigue el resultado.

ii) Sea M_0 degeneración de $\mathbb{P}^2$. Si D_0 es el generador amplio de $\mathrm{Pic}(M_0)$, existe una curva suave $C \in |D_0|$ tal que C no cruza las singularidades de M_0.

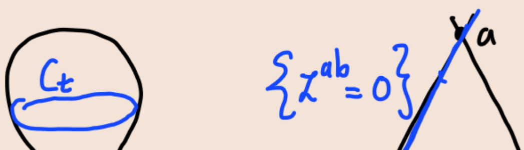
Obs: • Si $\beta = \sqrt{|B|}$ las singularidades suavizadas
Si $\alpha = \sqrt{|A|}$ las singularidades no suavizadas

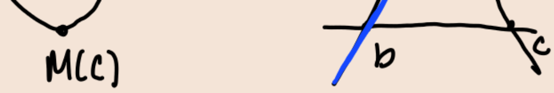
$\Rightarrow \mathcal{O}_{M_0}(D_0) \rightsquigarrow \mathcal{O}(\alpha^2\beta)$. Por tener $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\alpha^2\beta)) = h^0(\mathcal{O}_{M_0}(D_0))$

$\Rightarrow BS|D_t| \subseteq M$ es cerrado.

Esto garantiza la existencia de $C \rightsquigarrow C_0 \in |\mathcal{O}(\alpha^2\beta)|$ que no cruza las singularidades no suavizadas.

• $|D_0|$ es libre de puntos base $\Rightarrow$ C puede tomarse suave por Teorema de Bertini.





Prueba Teo A: (Sketch).

Sea $C>2$ número de Markov primo. En $M(C)$ sabemos que $\mathcal{O}_{M(C)}(C^2)$ se especializa a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(C)$ y por la prop anterior $\exists\, C \in |\mathcal{O}_{M(C)}(C^2)|$ suave.

Esto garantiza la existencia de la familia $C_t \rightsquigarrow C$. con $\deg(C_t)=C$.

La curva C no es plana?. Para ello mostramos que $\mathrm{gon}(C)<C-1$.

De la degeneración $\mathcal{O}_{M(C)}(a^2b^2) \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(ab)$ tenemos que $h^0(\mathcal{O}_{M(C)}(ab)) \geq 2$.

$\Rightarrow \exists\, f: M(C) \dashrightarrow \mathbb{P}^1$.

Esto se restringe a $f|_C : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ con $\deg(f|_C) = \mathcal{O}_{M(C)}(C^2) \cdot \mathcal{O}_{M(C)}(ab) = \frac{C^2ab}{C^2} = ab$.

- Siempre se sigue que $ab < C-1$ para números de Markov con $C>2$. Inducción. $\square$

Conj (DV-S): Para p primo no Markov, todo límite suave de curvas planas $\{C_t\}_{t\in\mathbb{D}}$ es una curva plana $C_0 \subseteq \mathbb{P}^2$.

Los resultados del paper que fundamentan esta conjetura son los siguientes.

Teo D: Todo límite suave de curvas planas con $\deg(C_t)=5$ es de dos tipos:
- Una curva hiperelíptica en $M(5)$
- Una curva plana.

Teo E: Todo límite suave de curvas planas con $\deg(C_t)=7$ es plana.

• El ingrediente principal de estos resultados es entender el siguiente espacio Moduli de pares semiestables.

$$\begin{array}{c}(X^{CY}, \mathcal{C}^{CY}) \\ \downarrow \\ \mathbb{D}\end{array} \quad \text{donde } (X^{CY}_t, C^{CY}_t) = (\mathbb{P}^2, C_t) \text{. con } \deg(C_t) = d.$$

- X_0^{CY} = degeneración $\mathbb{Q}$-Gorenstein de $\mathbb{P}^2$
- $(X_0, \frac{3}{d} C_0^{CY})$ es log canonical
- $-K_{X_0} \sim \frac{3}{d} C_0^{CY}$.

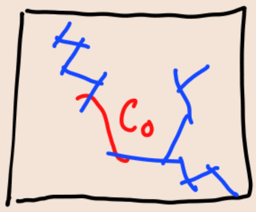
• En las parejas $(X_0^{CY}, \mathcal{C}_0^{CY})$, C_0^{CY} puede ser singular, con varias componentes y no reducida.

Prop: Si $d=7$, entonces X_0^{CY} es $\mathbb{P}^2$ ó $\mathbb{P}(1,1,4)$.

El límite semiestable de Hacking se relaciona con una degeneración $\mathcal{C} \to \mathbb{D}$ así

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}^{ss} \arrow[dl, "MMP"'] \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathcal{C}^{CY})^{norm} \arrow[d] \\
C_0 \subseteq \mathcal{C} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \mathcal{C}^{CY} \arrow[dl] \\
& \mathbb{D} &
\end{tikzcd}$$

suave

$\mathcal{C}^{ss} =$ 

curvas racionales

Con C_0^{ss} reducido y nodal.

Investigando las posibles singularidades de C_0^{CY}, si se asume que C_0^{CY} es reducido se sigue lo siguiente

Prop: Si $d=7$ y C_0^{CY} es reducido, entonces C_0^{CY} suave.

Estudiando las posibles configuraciones de curvas en $\mathcal{C}_0^{ss}$ y $\mathrm{lct}(X_0, \frac{3}{d} C_0^{CY})$ se concluye de que C_0^{CY} es plana. En $\mathbb{P}(1,1,4)$, C_0^{CY} está forzada a ser una curva de grado 14 y una "unibranch singularity".

Se sigue Teo E.