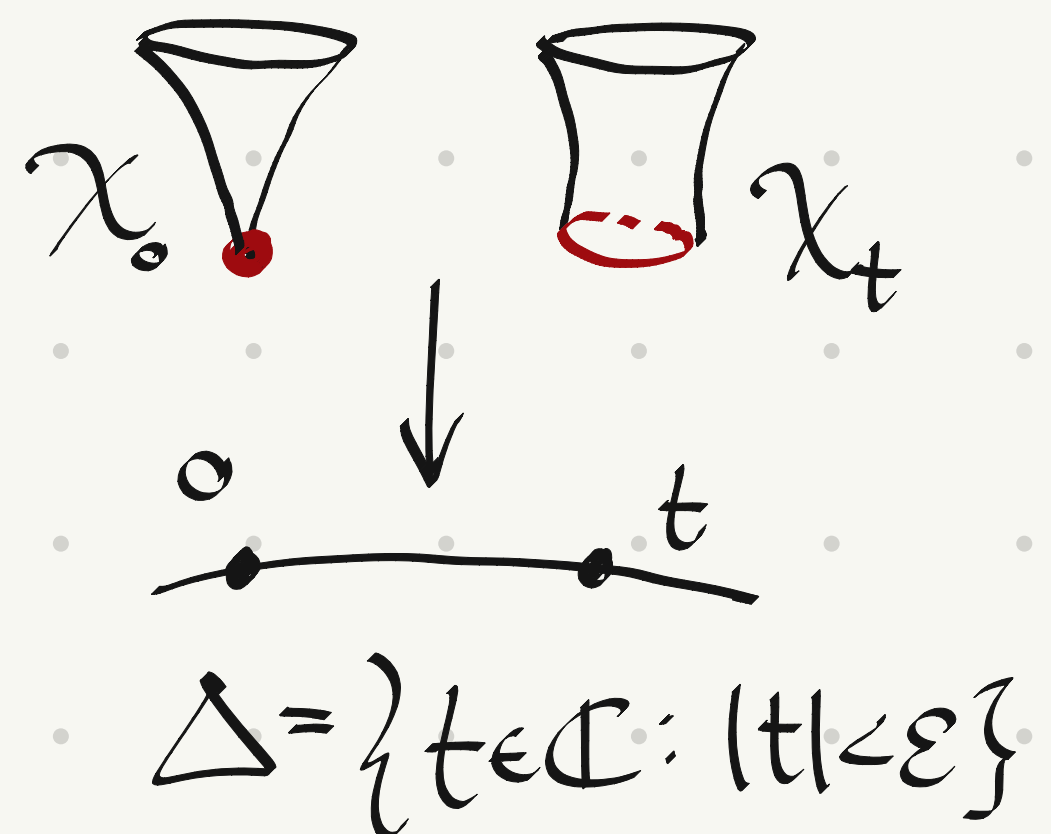


I. Introducción

Sea $(X, 0)$ el germen de una singularidad normal de una superficie compleja. Una suavización de $(X, 0)$ es un morfismo plano

$\pi: (X, 0) \rightarrow (\Delta, 0)$ tal que:

- $(X, 0)$ tiene una singularidad aislada 3-dimensional.
- $(\pi^{-1}(0), 0) \simeq (X, 0)$
- $\pi^{-1}(t)$ es suave para $t \neq 0$



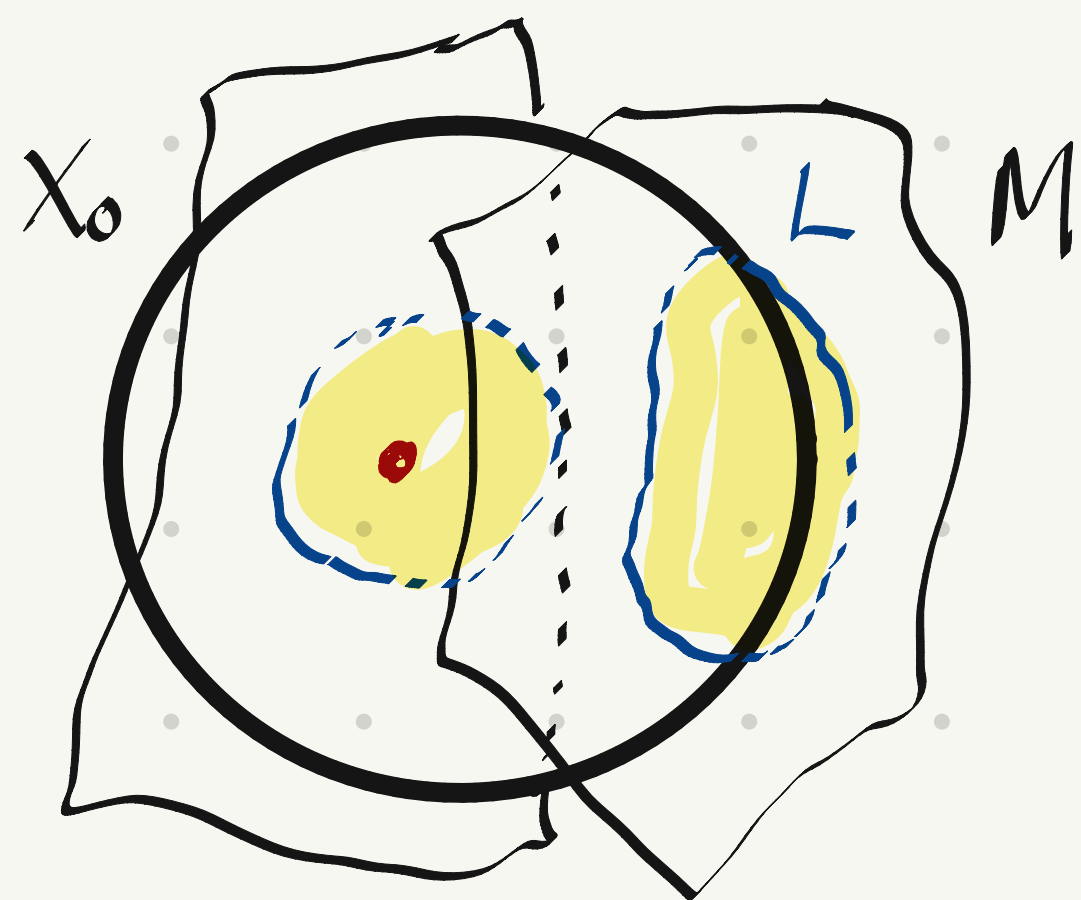
Si existe un embebimiento $(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$ entonces podemos inducir un embebimiento $(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N \times \Delta, 0)$ tal que el morfismo π es inducido por la segunda proyección:

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^N \times \Delta, 0) \\ & \searrow \pi & \downarrow \\ & & (\Delta, 0) \end{array}$$

La fibra de Milnor M de una suavización π de $(X, 0)$ está definida de intersección una fibra $\pi^{-1}(t)$, $t \neq 0$ cercana al origen con una pequeña bola centrada en el origen.

Es decir: $\pi^{-1}(t) \cap B(0, \delta)$ para $0 < |t| < \delta \ll \epsilon$

La fibra de Milnor es una 4-variedad compleja, con el link L de la singularidad como su frontera.



En particular, el tipo de difeomorfismo de M depende sólo de la suavización π , luego los invariantes topológicos de M son invariantes de la suavización π .

M es una 4-variedad, con tipo de homotopía igual a la de un CW-complejo de dimensión 2. luego $H_i(M, \mathbb{Z}) = 0$, $i > 2$.

En 1983, Greuel y Steenbrink mostraron que $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$. luego el invariante topológico importante es $H_2(M, \mathbb{Z})$.

El número de Milnor de una singularidad π se define:

$$\mu = \dim_{\mathbb{Q}} H_2(M, \mathbb{Q})$$

Si $\mu = 0$ entonces M tiene la misma homología racional que D^4 es decir $H_i(M, \mathbb{Q}) = H_i(D^4, \mathbb{Q})$.

En tal caso M es un disco de homología racional (\mathbb{Q} -homology disk) y lo abreviamos por $\mathbb{Q}HD$.

Correspondientemente, la singularidad π se llama una singularidad de homología racional (y la llamaremos singularidad $\mathbb{Q}HD$).

Si una simplicidad admite una singularidad $\mathbb{Q}HD$ la llamaremos simplicidad $\mathbb{Q}HD$.

Una resolución de singularidad $(X, 0)$

es un morfismo birracional $\psi: (S, E) \rightarrow (X, 0)$

tal que (S, E) es suave, $(S|E, E) \cong (X|0, 0)$.

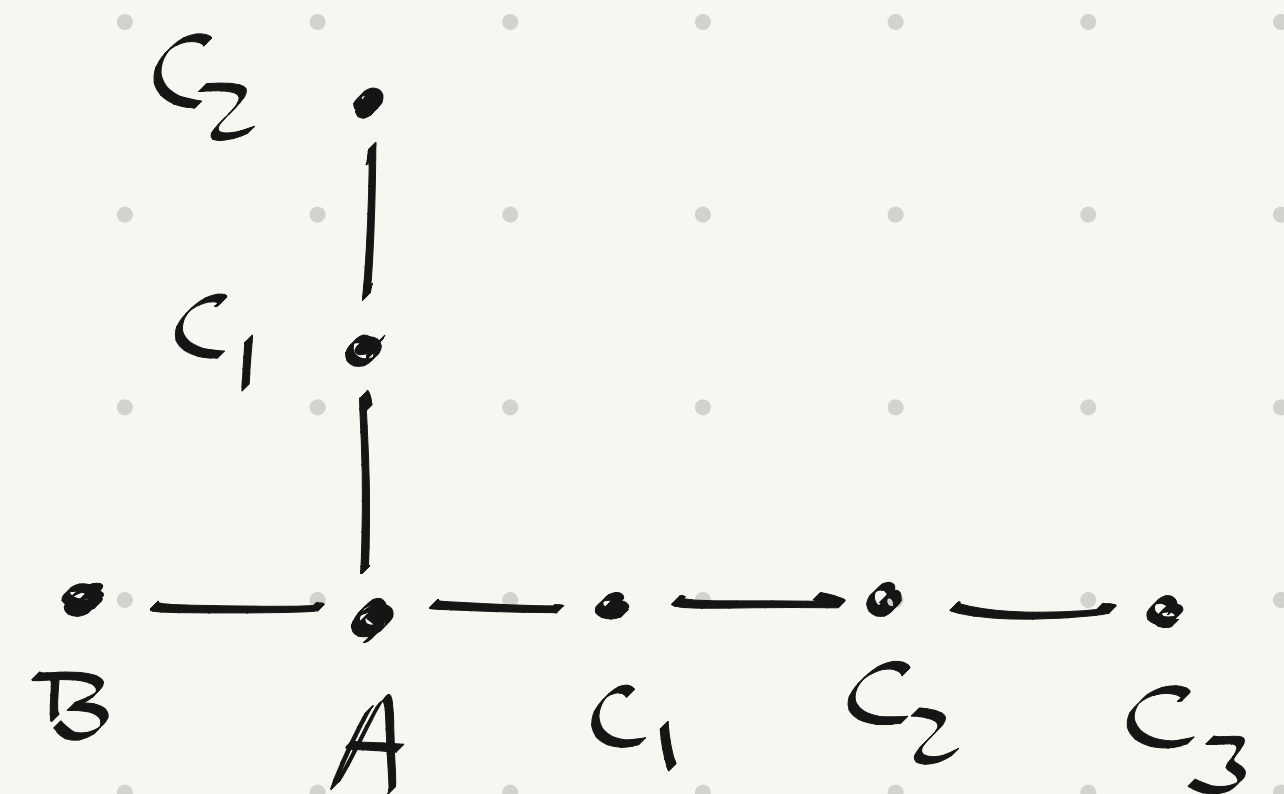
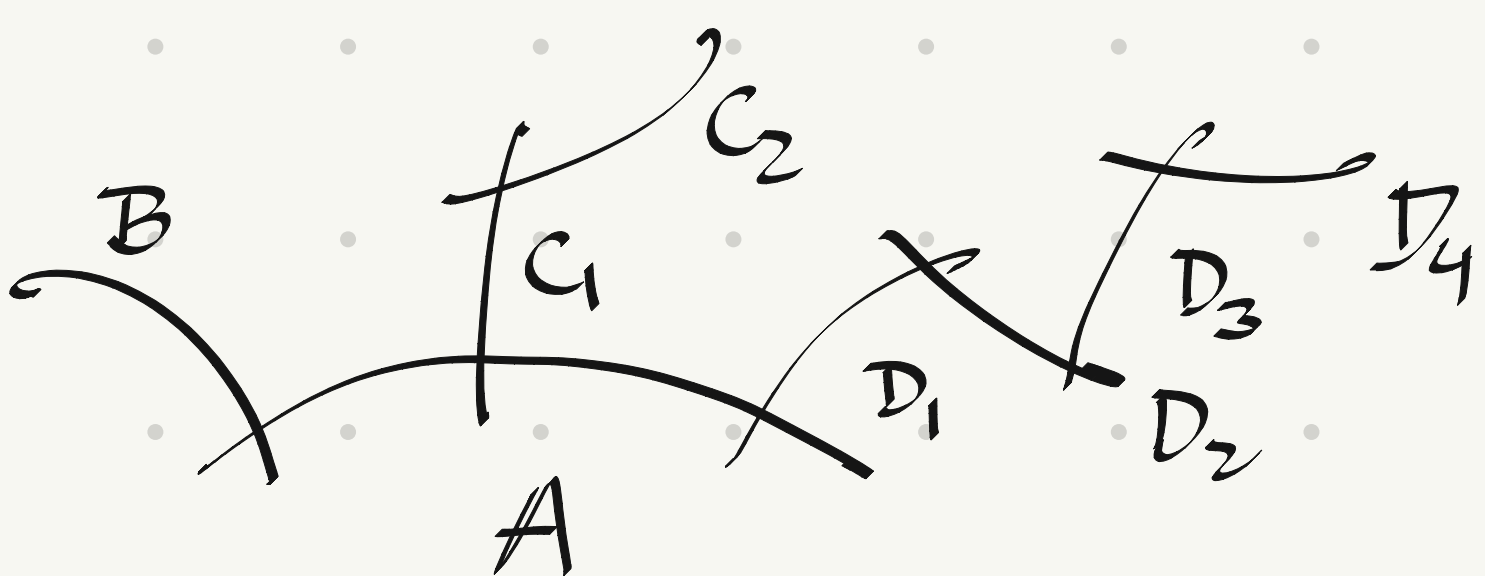
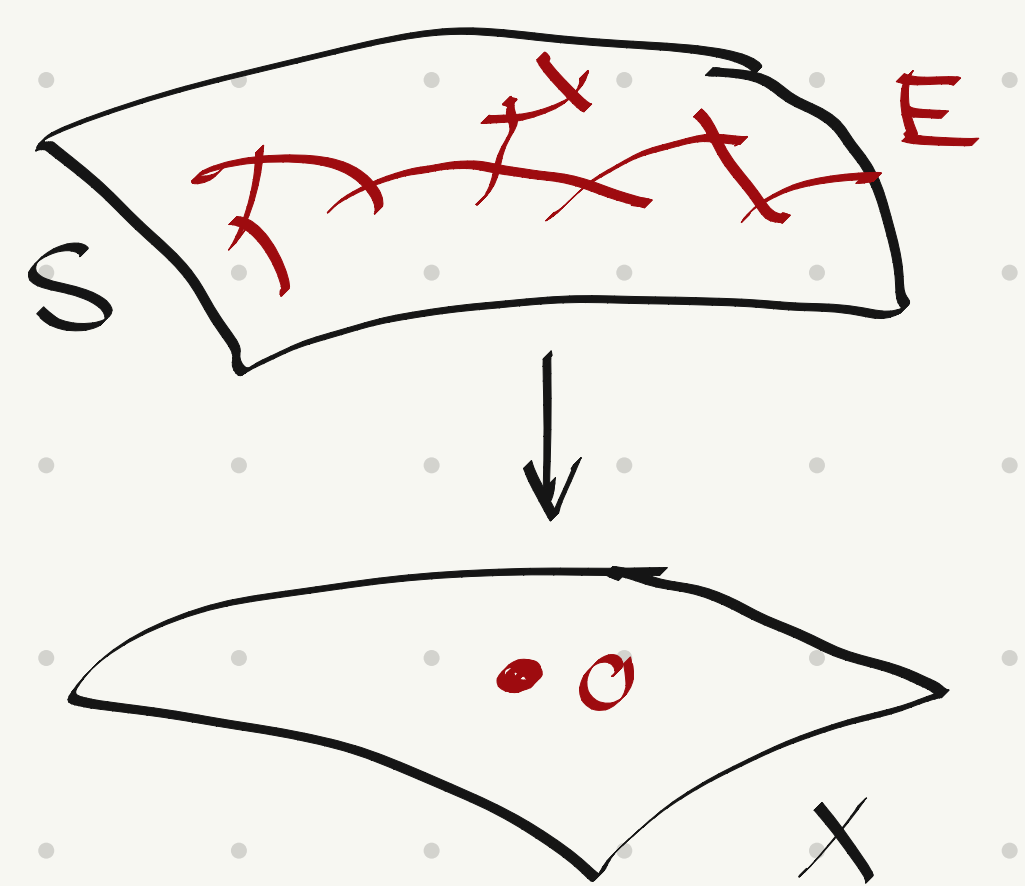
Aquí $E \subseteq S$ es una unión de curvas

reducibles racionales. E es el conjunto excepcional.

El grafo dual asociado a la configuración de curvas de E

es un grafo donde cada curva es un vértice y cada

arista es una intersección entre curvas.



Configuración de Curvas E

Grafo Dual P_E

Decimos que un grafo Γ es $\mathbb{Q}HD$ si existe una simplicidad cuya resolución tiene divisor excepcional E t.q. $\Gamma \cong P_E$.

Toda simplicidad QHD es racional y por tanto, su grafo de resolución es un árbol y sus vértices conas racionales. Herzog y Wahl mostraron en los 80's que las únicas simplicidades de cociente cíclico que son QHD son exactamente el caso A_1 y las simplicidades $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ donde $0 < a < n$ con $(na) = 1$; llamadas simplicidades de Wahl. Por otro lado, en 2011, Bluphal y Stipsicz clasificaron todas las simplicidades homogéneas con pesos (WHS) que son QHD. (Ver lista)

Wahl capturó el mismo año que esas debían ser todas las simplicidades QHD. Esta es la conocida captura QHD.

II. El intento de demostración de Park, Shin y Stipsicz.

En 2014, Park-Shin-Stipsicz publicaron un pre-print en Arxiv asegurando haber probado la captura QHD.

El teorema que aseguraban demostrar fue:

Teorema. Suponer que \bar{P} es grafo negativo definido minimal con al menos dos nodos. (ie. vértices con valor mayor que 2) Entonces no existe una simplicidad QHD con grafo de resolución \bar{P} .

Para entender el porqué esta proposición demostraba la captura, primero tenemos que entender un poco sobre la historia de la clasificación de simplicidades QHD:

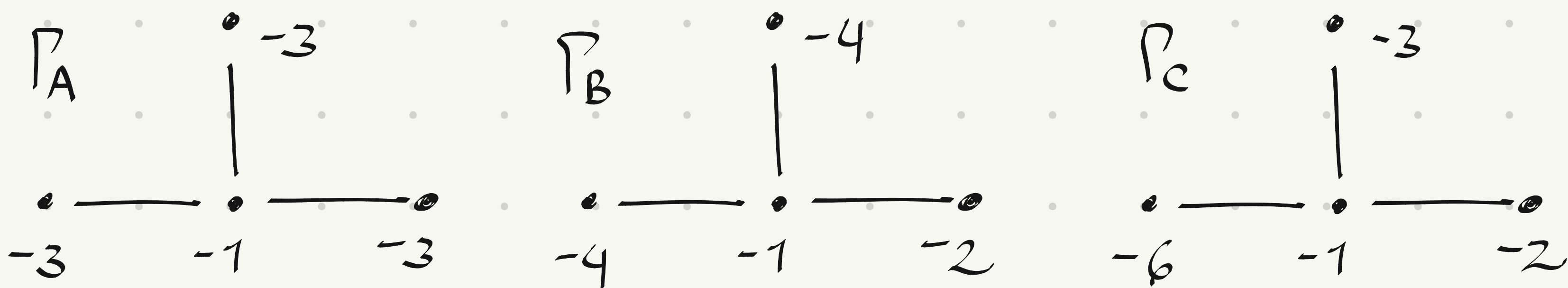
➤ En 2008, Stipsicz-Szabó-Wahl probaron evidencias numéricas fuertes sobre los grafos QHD clasificándolos en 6 familias:

- W, M, N todos estos son taut
- A, B, C estas no son taut, dependen además de un crossratio de 4 puntos.

Estos hechos fueron probados por Laufer en 1971.

Nota Una simplicidad es taut si está completamente determinada por su grafo de selección.

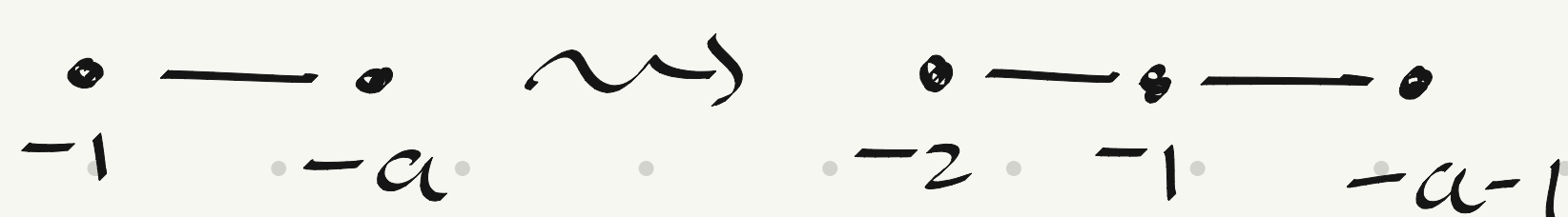
En el mismo trabajo, se mostró que los grafos de las familias A, B, C se construyen a partir de 3 operaciones partiendo de los grafos no-minimales:



Las operaciones son:



B2) BlowUp en un eje adyacente al vértice (-1):



Repetiendo estas operaciones sobre un grafo no-minimal de la familia X se obtiene un grafo no-minimal de la familia X , donde $X = A, B, C$.

Finalmente, sobre un grafo no minimal aplicamos la operación:

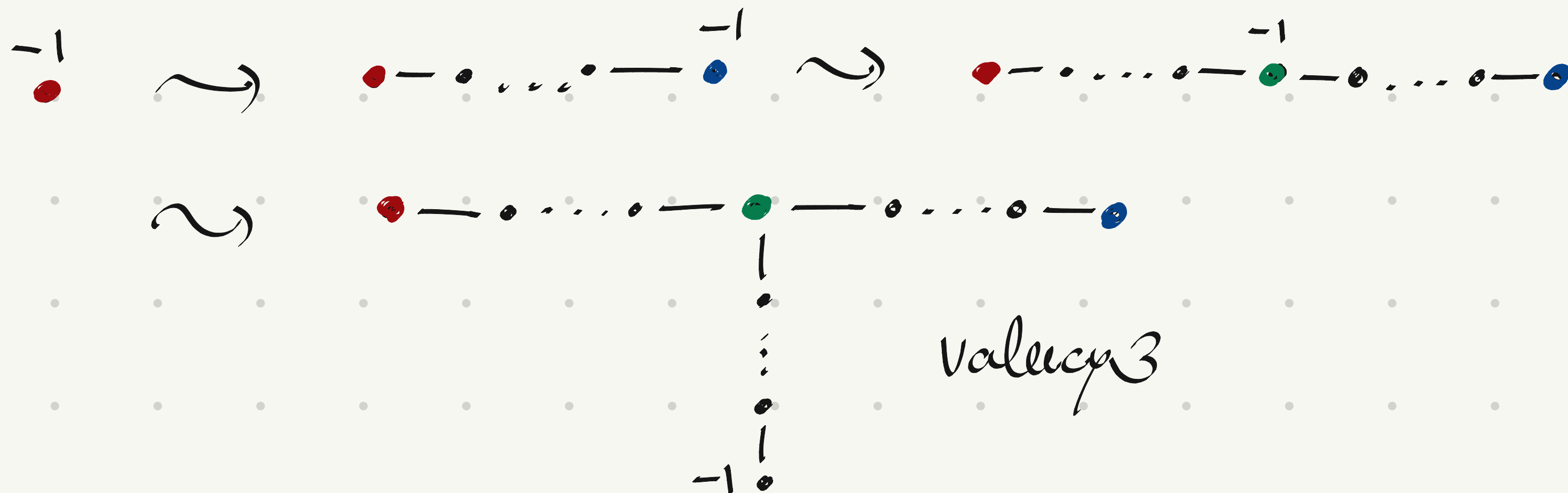
(M) Modificar el único vértice (-1) de Γ en X por:

$$\begin{cases} -4 & \text{si } X=A \\ -3 & \text{si } X=B \\ -2 & \text{si } X=C \end{cases}$$

Las clases A, B, C son las colecciones de grafos no-minimales obtenidos de esta manera.

Claim Un grafo en $A \cup B \cup C$ tiene a lo más un nodo de valency 4, los demás son valency 3.

Idea:



\triangleright Buphal y Stipsicz clasificaron todas las simplicidades
 WMS (simplicidades obtenidas a partir de un polinomio
 homogéneo con pesos) que poseen una suavización QHD.
 Mostraron que todas las W, M, N son QHD.
 Mostraron las A, B, C que son QHD.

\triangleright Fewles determinó los cross ratios de las simplicidades
 de tipo A, B, C que son QHD.

- Anarmónico: $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 4)$

- Harmónico: $(a, b, c, d) = (2, 4, 4, 3)$

- 9 para $(a, b, c, d) = (2, 3, 6, 2)$

Con esto se tiene la clasificación completa de las simplicidades
 QHD con grafo a lo más un nodo.

Adjuntando la proposición de Park-Skin-Stipsicz se tendría
 la clasificación completa.

III. la idea de la demostración de la proposición Park-Skin-Stipsicz

Una componente irreducible del espacio base de deformaciones
 semi universales de la simplicidad $(X, 0)$ es llamada una
 componente de suavización si la fibra genérica sobre tal
 componente es suave.

Para una simplicidad racional de superficie, toda componente
 es una componente de suavización, pero su dimensión
 puede variar. Estamos interesados en componentes que
 contienen suavizaciones QHD.

Teorema. (Wahl, 2011)

Una componente de suavización QHD de una simplicidad
 racional de superficie tiene dimensión:

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y(-\log E)) + \sum_{i=1}^r (d_i - 3) \quad (*)$$

donde $(Y, E) \rightarrow (X, 0)$ es la resolución minimal buena.

$E = \sum_{i=1}^r E_i$, $\Theta_Y(-\log E)$ es el haz logarítmico de curvas vectoriales; es el kernel de $\Theta_Y \rightarrow \bigoplus \mathcal{N}_{E_i}$; $E_i^2 = -d_i$

Corolario. Una componente de suavización QHD de una WHS tiene dimensión 1.

Wahl probó que algunos grafos en $A \cup B \cup C$ no admiten una simplificación QHD, utilizando (*).

La idea de la demostración de Park-Shin-Stipsicz consiste en mostrar que si $(0 \in X)$ es una simplificación con grafo $\bar{\Gamma} \in A \cup B \cup C$ con dos nodos, entonces

$$h^1(Y, \Theta_Y(-\log E)) + \sum_{i=1}^r (d_i - 3) \leq 0 \quad (**)$$

↓
Depende de la estructura analítica de $(0 \in X)$.

La dificultad en probar esta desigualdad consiste en que las simplificaciones con grafos de resolución con al menos dos nodos, no suelen ser taut.

ie. Puede existir muchas simplificaciones analíticamente distintas con el mismo grafo de resolución!!!

La dimensión de $h^1(Y, \Theta_Y(-\log E))$ depende de la estructura analítica de la simplificación $(X, 0)$.

La idea principal consiste en probar que existe una simplificación "natural" $(X_0, 0)$ con resolución minimal buena $(Y_0, E_0) \rightarrow (X_0, 0)$ con mismo grafo de resolución (y mismo cross-ratio) tal que:

$$h^1(Y, \Theta_Y(-\log E)) \leq h^1(Y_0, \Theta_{Y_0}(-\log E_0))$$

ie. $(X_0, 0)$ tiene la propiedad de tener dimensión maximal en $h^1(Y, \Theta_Y(-\log E))$ en el conjunto de simplificaciones con mismo grafo de resolución.

Controlando aún la expresión (*) para esta simplicidad se prueba eventualmente la desigualdad deseada. Lauter probó la propiedad de maximalidad para simplicidades (pseudo) taut. Usó esto para obtener la lista completa de los grafos de resolución de dichas simplicidades.

En el pre-print se afirma generalizar esto para toda simplicidad racional de superficie, que tenga grafo de resolución con nodos valency 3 con a lo más una excepción que es valency 4. Para ello, primero prueba que dado un grafo de resolución \bar{P} , existe una simplicidad natural con \bar{P} como grafo de resolución tal que tiene la propiedad de maximalidad.

Para ello se construyen las "plumbing surfaces". Luego se verifican propiedades cohomológicas de dichas superficies.

Además se provee una fórmula para observar cómo cambia la dimensión de la fórmula (*) bajo blow-ups. Con esto último, se prueba la desigualdad (**).

II. Superficies Plumbing

Para un grafo no minimal P de tipo A, B o C es posible construir un modelo de una superficie plumbing S_P de la siguiente manera:

Sea C_∞ la sección con $C_\infty^2 = -1$ de \mathbb{F}_1 .

Escoger tres fibras distintas F_1, F_2, F_3 de \mathbb{F}_1 intersectando C_∞ en $0, 1, \infty$ respectivamente.

Uno puede realizar blow-ups sobre los puntos de intersección con C_∞ y las fibras F_i para construir un divisor excepcional que tenga el grafo P como en la tesis de Fowler.

Entonces la superficie resultante de tomar el germe alrededor del divisor con grafo P nos da una

superficie plumbray.

¿Es posible obtener todas las simplificaciones maximales de esta manera?

La construcción general realizada en el pre-print es la siguiente:

Para $i=1, \dots, n$ sea $U_{ik} = \mathbb{C}^2$ ($k=1,2$) con coordenadas (x_{ik}, y_{ik}) . Pegamos U_{i1} con U_{i2} via:

$$\phi_i : U_{i2} \setminus \{x_{i2}=0\} \rightarrow U_{i1} \setminus \{x_{i1}=0\}$$

$$(x_{i2}, y_{i2}) \mapsto (1/x_{i2}, x_{i2}^{d_i} y_{i2})$$

para obtener así $V_i = U_{i1} \cup_{\phi_i} U_{i2}$. El vértice $(-d_i)$ E_i es la sección nula:

$$E_i = \{y_{i1}=0\} \cup \{y_{i2}=0\} (\cong \mathbb{C}P^1) \subset V_i$$

del line bundle sobre $\mathbb{C}P^1$ con y_{ik} ($k=1,2$) como coordenadas de fibra.

Primero definimos un espacio analítico V_P asociado a P pegando entornos de las secciones nulas E_i 's de los V_i 's como se explica abajo:

Si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$ pegamos un entorno de

$E_i \subset V_i$ y otro de $E_j \subset V_j$ como sigue:

Fijando i , pegamos los (a lo más 4) puntos

$$\{E_i \cap E_j \mid j \neq i\} \subseteq E_i \text{ en } x_{i1}=0, x_{i2}=0, x_{i1}=1, x_{i1}=c$$

donde c es el crossratio ($c \neq 0, 1$) del grafo Γ .

Escoger $(x_{i1}, y_{i1}), (x_{i2}, y_{i2}), (x_{i1}-1, y_{i1}), (x_{i1}-c, y_{i1})$

como base local de coordenadas de V_i cerca de

$x_{i1}=0, x_{i2}=0, x_{i1}=1, x_{i1}=c$ respectivamente.

Cerca de un punto de $E_i \cap E_j$ pegamos un entorno

de $E_i \subset V_i$ y $E_j \subset V_j$ intercambiando las coordenadas

de base y fibras de V_i con V_j .

Definición. La superficie plumbing S_p asociada a P es un formen del espacio cuantico V_p a lo largo de las curvas $E = \cup E_i$.

Propiedades colomológicas relevantes son independientes del cross-ratio c .

Por abuso de notación denotaremos la superficie plumbing $S_{p,c}$ por S_p simplemente.

Esta construcción es basada en una realización por Schüller: "On taut singularities in arbitrary characteristics."

La siguiente parte importante es una proposición de Schüller:

Proposición. Sea $Z(s) = \sum_{i=1}^n s_i E_i$ un ciclo excepcional efectivo soportado en E . Entonces existe un esquema integral aliu T y un mapa sobreyectivo plano, localmente trivial $f: X \rightarrow T$ tal que $Z_p(s) = f^{-1}(t_0)$ para algún punto cercano $t_0 \in T$, $Z(s) \simeq f^{-1}(t_1)$ para algún $t_1 \in T$.

Mediante esto es posible comparar:

$$h^1(Z(s), \mathcal{O}_{Z(s)}) \leq h^1(Z_p(s), \mathcal{O}_{Z_p(s)})$$

Aquí $Z_p(s)$ es sólo la curva-plumbing, ie la curva definida por las curvas en la construcción anterior como esquema, pero no es una superficie.

El gap recae en la existencia de una simplicidad maximal. Esto sólo muestra que ellas están acotadas.