¡La conjetura de Poincaré Generalizada!

La pregunta: ¿Cómo reconocer a una esfera?

Homotopía | Homeomorfismo | Difeomorfismo

Hoy | TOP | Próxima vez. DIFF.

(I) HOMOTOPÍA: Sea M^d variedad (manifold) suave compacta orientable de dimensión d.

¿Cuándo es M homotópicamente equivalente a

$$S^d = \{(x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|\vec{x}\| = 1\}.$$

<u>Nota</u>: Al menos $H_*(M) \cong H_*(S^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, d \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$ $(*)$ otro caso

Conjetura "ingenua": Si M es una esfera homológica $\Rightarrow$ M es homotópicamente equiv. a S^d.

Falso!! [Poincaré]: $\exists$ G finito perfecto no trivial que actúa de manera libre en S^3. $\Rightarrow$ $M := S^3/G$

$H_*(M) = H_*(S^3)$, pero $\boxed{\pi_1 M = G}$

$\Rightarrow$ M no es homotópicamente equiv. a S^3.

~~Conjetura~~ **Teorema:** Toda esfera homológica simplemente conexa es homotópicamente equiv. a S^d.

Prueba: 1) Teorema Whitehead:

X, Y complejos CW. $\pi_1 X = 0 = \pi_1 Y$ y

$f: X \to Y$ continua tq $f_*: H_*(X) \to H_*(Y)$ es iso $\forall *$

$\Rightarrow f$ es una equivalencia homotópica.

Obs: Importante que el iso en H_* sea inducido por aplicación continua.

por ejemplo $\mathbb{C}P^2$ $S^2 \vee S^4$

H_* son iguales pero no homotópicamente equivalentes.

2) Teorema de Hurewicz: Si X es un espacio n-conexo $\pi_1 X = 0$.
(i.e. $\pi_i X = 0$ para $i \leq n$) entonces

$$\pi_{n+1} X \cong H_{n+1}(X).$$

Ahora sí la prueba: esfera homológica M^d, $\pi_1 M = 0 \Rightarrow M \simeq S^d$

$\pi_1 M = 0 \Rightarrow H_1 M = 0$ ✓

$\pi_2 M = H_2 M = 0$ ✓

$\vdots$

$$\begin{array}{l} \pi_d M \cong H_d(M) \cong H_d(S^d) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \text{generado por } f: S^d \to M^d \\ \parallel \\ [S^d, M]_* \end{array}$$

$\Rightarrow f_*: H_*(S^d) \to H_*(M^d)$
es iso.

$\Rightarrow f$ es equiv. homotópica. ∎

Def: Una d-esfera homotópica es una variedad suave cerrada que es homotópicamente equivalente a S^d.

(II) Homeomorfismo: ¿Es toda esfera homotópica homeomorfa a S^d?

Conjetura de Poincaré.

$$\left.\begin{array}{l} \text{dim } d=1 \longrightarrow S^1 \\ \phantom{\text{dim }} d=2 \longrightarrow S^2 \end{array}\right\} \text{clasificación.}$$

dim 3: $\longrightarrow$ Respuesta es sí $\rightarrow$ Perelman (PDE)

dim 4 $\longrightarrow$ R/ es sí $\longrightarrow$ Freedman

dim 5 $\longrightarrow$ R/ es sí $\longrightarrow$ Kervaire y Milnor

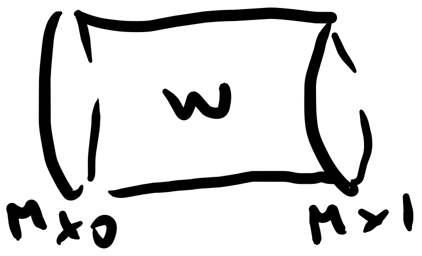
• dim ≥ 6 $\longrightarrow$ R/ es sí $\longrightarrow$ Smale

Teorema de h-cobordismo

• Un cobordismo entre variedades M^d y N^d es una $(d+1)$-variedad W^{d+1} tq $\partial W = M \sqcup N$

Si $M \hookrightarrow W \hookleftarrow N$ son equivalencias homotópicas $\Rightarrow$ W se llama un h-cobordismo.

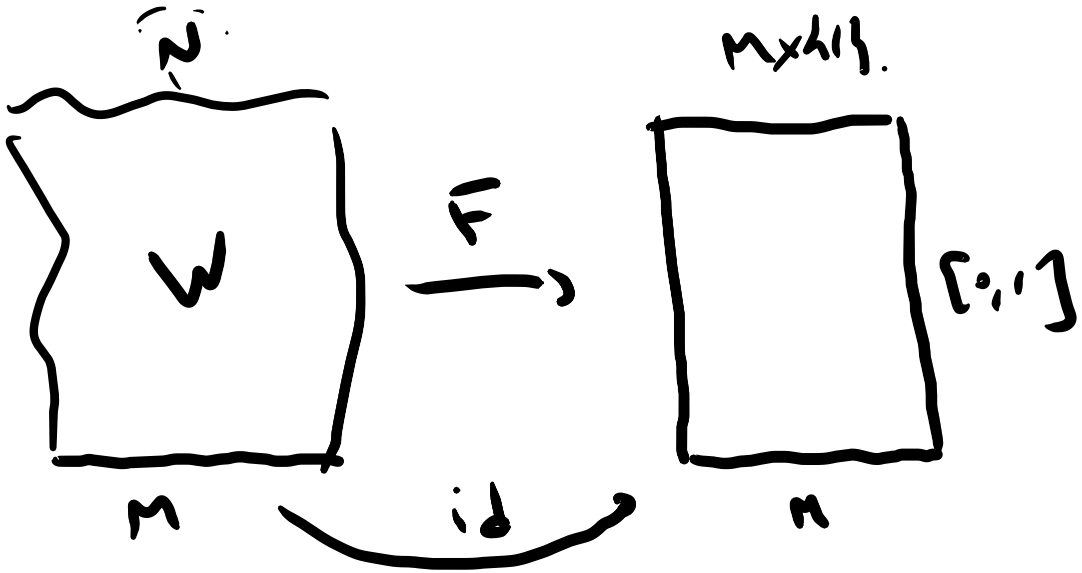
Ejemplo: $W = M \times [0,1]$



se llama el h-cobordismo trivial.

Teorema de h-cobordismo: Sea W^d ($d \geq 6$) un h-cob simplemente conexo entre variedades M^{d-1} y N^{d-1} simplemente conexas. Entonces existe un difeo

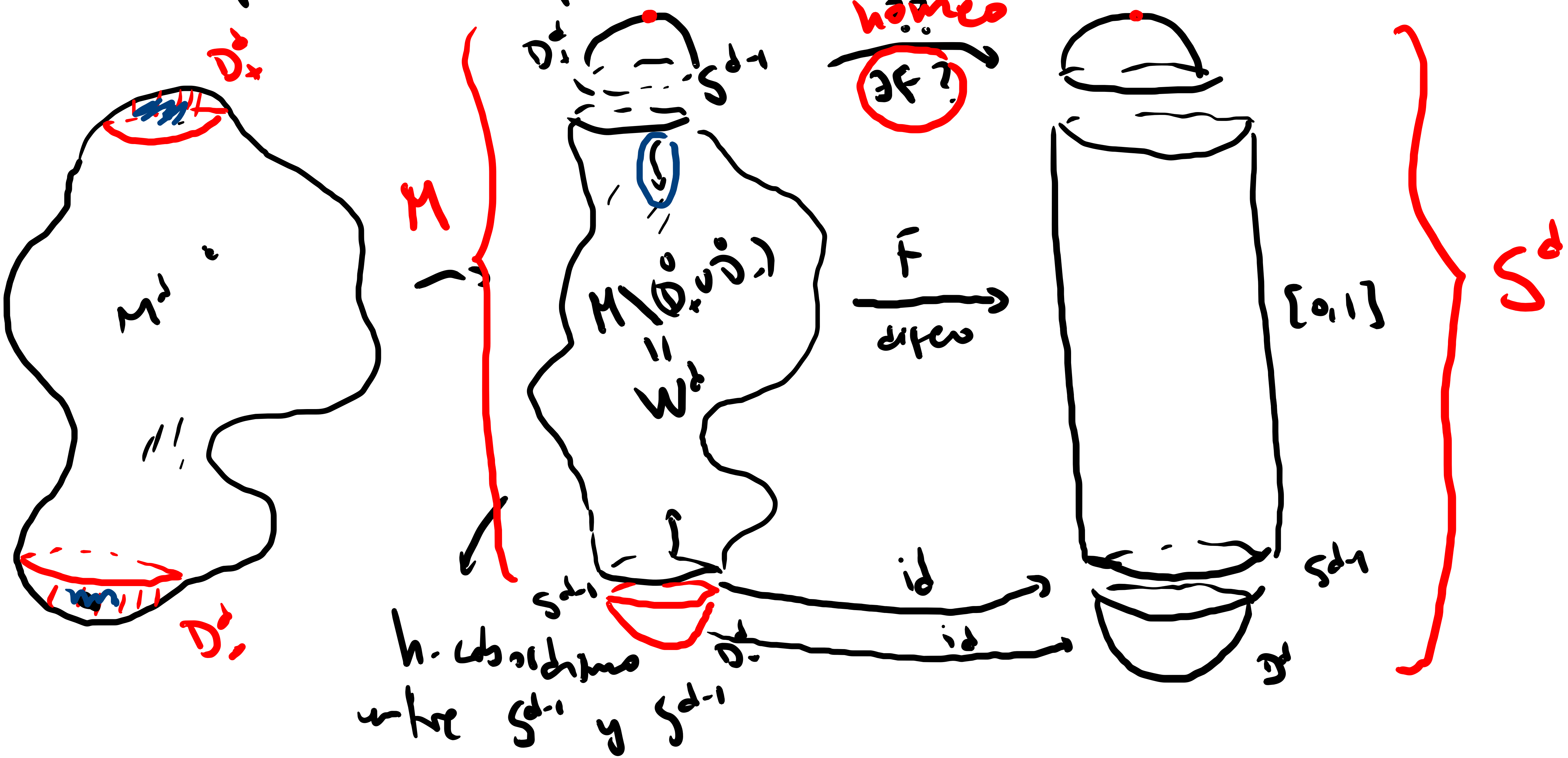
$$F : W \longrightarrow M \times [0,1] \quad \text{tq} \quad F|_M = id_M : M \longrightarrow M.$$



CONSECUENCIA:

d=5 falla. [Donaldson]

[Conjetura de Poincaré Generalizada] Si M^d ($d \geq 6$) es una esfera homotópica $\Rightarrow$ M es homeomorfa a S^d.




$D^2 \hookrightarrow$

Redujimos a:

$f : S^{d-1} \longrightarrow S^{d-1}$ difeo, ¿lo podemos extender a un difeo?

R/ No siempre. Pero siempre se puede extender a un homeo. (Truco de Alexander)

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \|x\| > 0 \\ 0 & \|x\| = 0. \end{cases}$$

$d = 5$ ∃ Existen h-cobordismos W^5
entre M^4 y N^4 que no son
triviales (en la categoría difeo)

es decir ∄ difeo

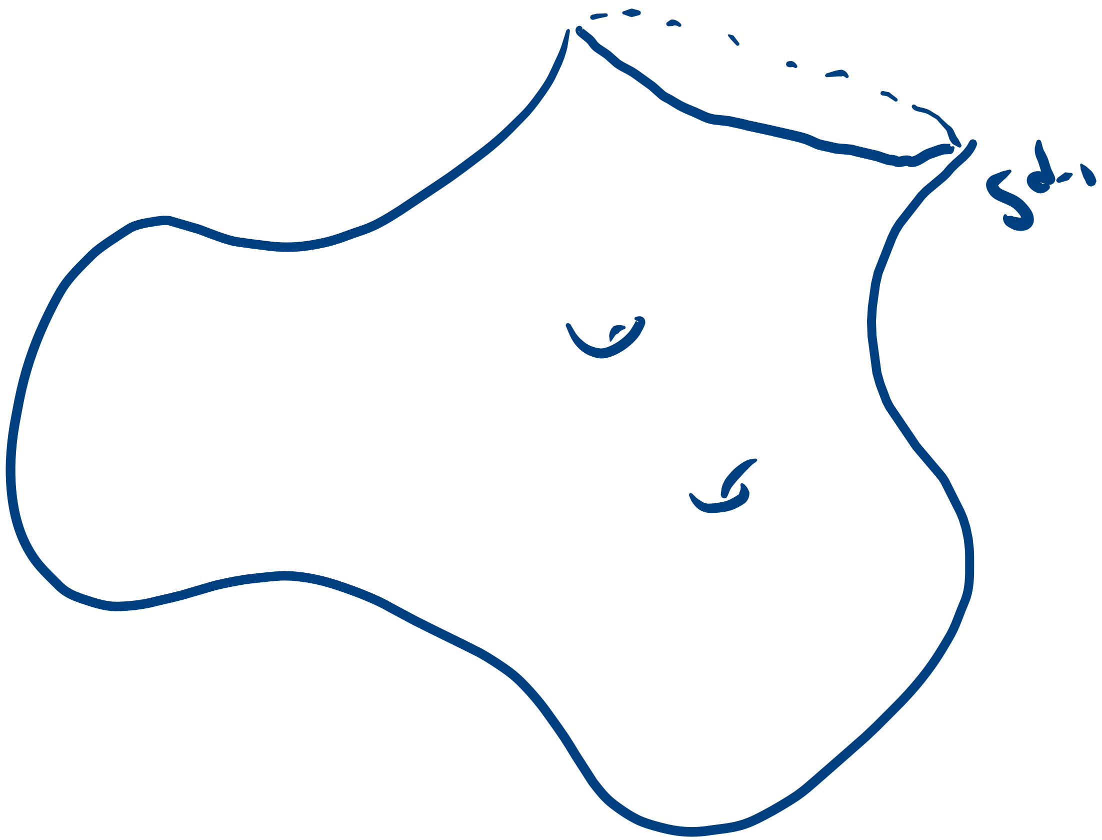
$$W \xrightarrow{F} M \times [0,1].$$

[Donaldson]: $M = K3$ $b_2 = 3$

[Lectures on the h-cobordism theorem]

C.T.C. Wall: Differential topology.

Kosinski: Differentiable manifolds.


S^{d-1}