ESFERAS EXÓTICAS EN DIM 7.

¿Cómo reconocer a una esfera?

$\left\{\begin{array}{l}\text{Esferas homológicas} \\ + \ \pi_1 = 0\end{array}\right. \iff$ Esfera homotópica $\overset{d \geq 6}{\implies}$ Esfera topológica

¿Si M^d es homeomorfa a $S^d \Rightarrow M^d$ es difeo a S^d?

R/ ¡NO! [Milnor]

[Kervaire-Milnor]:

dim	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
# esferas exótica $\cup S^d$	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	...

Teorema [Milnor]: Existen esferas exóticas en dim 7, es decir existe una 7-variedad suave M que es homeo pero no difeo a S^7.

"Dem": Es "constructiva".

- Considerar haces vectoriales de rango 4 sobre S^4.
- $\{\mathbb{R}^4 \to E \to S^4\}/_{iso}$

$$\updownarrow$$

$$[S^3, SO(4)] = \pi_3 SO(4)\,!$$

$$\left\{\begin{array}{c} D^4_+ \times \mathbb{R}^4 \\ \uparrow \varphi \\ D^4_- \times \mathbb{R}^4 \end{array}\right\} \qquad S^3$$

$\varphi : S^3 \times \mathbb{R}^4 \to S^3 \times \mathbb{R}^4$

$(x, v) \mapsto (x, A_x v)$

$A_x \in SO(4) \subset GL_4(\mathbb{R})$

- $D^4 \to DE \to S^4$
- $S^3 \to SE \to S^4$.

Función de pegado que se usa:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (i,j)$ $\qquad S^3 = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \}$.

$$S^3 \xrightarrow{\varphi_{ij}} SO(4)$$
$$q \longmapsto \left(\underline{x} \longmapsto q^i \underline{x} q^j \right)$$

$\mathbb{R}^4 \to E_{ij}$ es el haz correspondiente a φ_{ij}.
$\downarrow$
S^4

$D^4 \to DE_{ij} \to S^4$

$S^3 \to SE_{ij} \to S^4$

Notar: $\cdot$ SE_{ij} es variedad suave es dim 7 y no tiene frontera.

$\cdot$ DE_{ij} es una 8-variedad

$\partial DE_{ij} = SE_{ij}$

Pregunta: ¿SE_{ij} es homeo a S^7?

$S^3 \to SE_{ij} \to S^4$

$S^3 \to S^7 \to S^4$

- $SE_{00} = S^4 \times S^3$

Proposicion: Si $|i+j| = 1 \Rightarrow SE_{ij}$ es homeo a S^7.

$\pi_7 S^4$

Dem: 1) Seifert-Van Kampen: $\pi_1 SE_{ij} = 0$ ✓

2) Basta con probar que SE_{ij} es una esfera homológica.
Usamos Mayer-Victoris, se reduce a mostrar que

$$H_3(\partial D^4 \times S^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_3(D^4_+ \times S^3) \oplus H_3(D^4_- \times S^3)$$

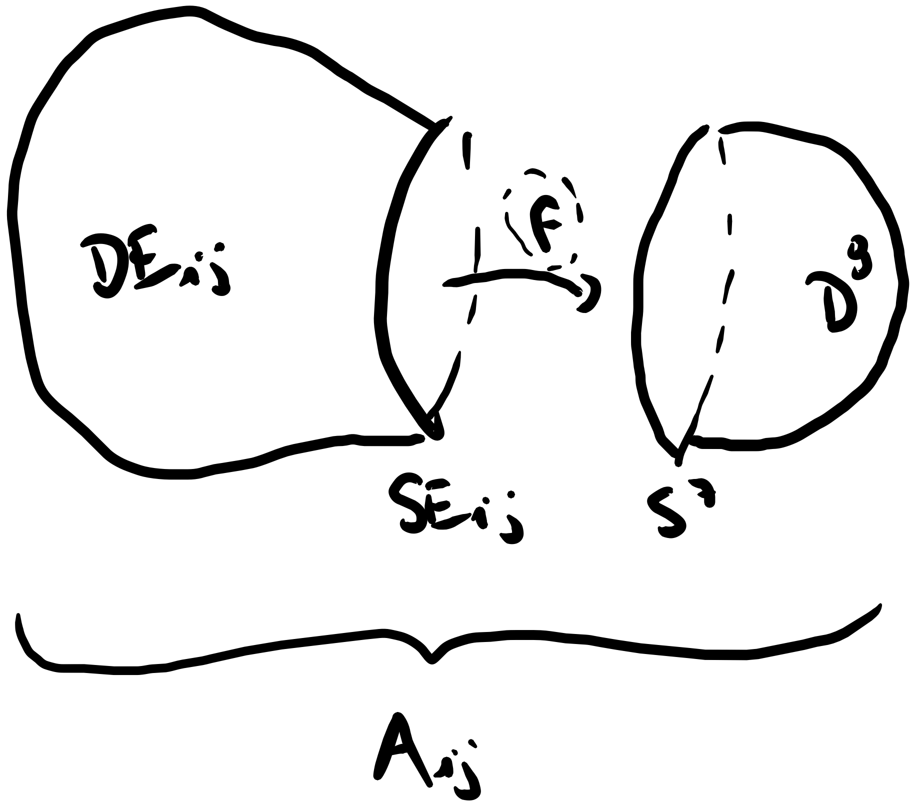
es un iso.

$\Rightarrow$ reduce a ~~estudiar~~ probar que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i+j & 1 \end{pmatrix}$ es invertible sobre $\mathbb{Z}$. ∎

Fijamos $i+j=1$.. ¿cuándo es SE_{ij} difeo a S^7?

- Supongamos que $\exists\ f: SE_{ij} \to S^7$ difeo.

Construimos



A_{ij} es variedad suave sin frontera y de $\dim = 8$.

Vamos a ver que para algunos valores de i y j esta variedad no puede ser suave !!

El invariante se construye con la "signatura".

LA SIGNATURA: $\cdot$ M variedad cerrada orientada. $\dim = 4k$.

$\cdot$ $[M] \in H_{4k}(M)$.

$\cdot$ $B : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(a, b) \longmapsto B(a,b) = \langle a \cup b, [M] \rangle = \int_M a \wedge b$

Definimos $\sigma(M) =$ signatura de B

$= (\#\text{ autovalores } +) - (\#\text{ autovalores } -)$

Ej: $\sigma(\mathbb{C}P^4) = 1$

$\sigma(S^4 \times S^4) = \text{signatura}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Teorema de la Signatura → Hirzebruch: Existe un polinomio homogéneo $L_K \in \mathbb{Q}[\underbrace{p_1, \dots, p_K}_{\text{clases de Pontryagin}}]$ de grado $4K$ $(|p_i| = 4i)$ tq $\forall$ variedad cerrada M^{4K}

$$\sigma(M) = \langle L_K(TM), [M] \rangle$$

e.g. $L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$

$$\boxed{p_i(M) := p_i(TM) := (-1)^i c_{2i}(TM \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(M; \mathbb{Z})}.$$

Ahora calculamos:

* $\sigma(A_{ij})$ usando definición: $H^k(A_{ij}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,4,8 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sigma(A_{ij}) = \pm 1 \,!$$

* $\sigma(A_{ij})$ usando Hirzebruch:

$$\pm 1 = \sigma(A_{ij}) = -\frac{4}{45}(i-j)^2 + \left\langle \frac{7}{45} p_2(A_{ij}), [A_{ij}] \right\rangle .$$

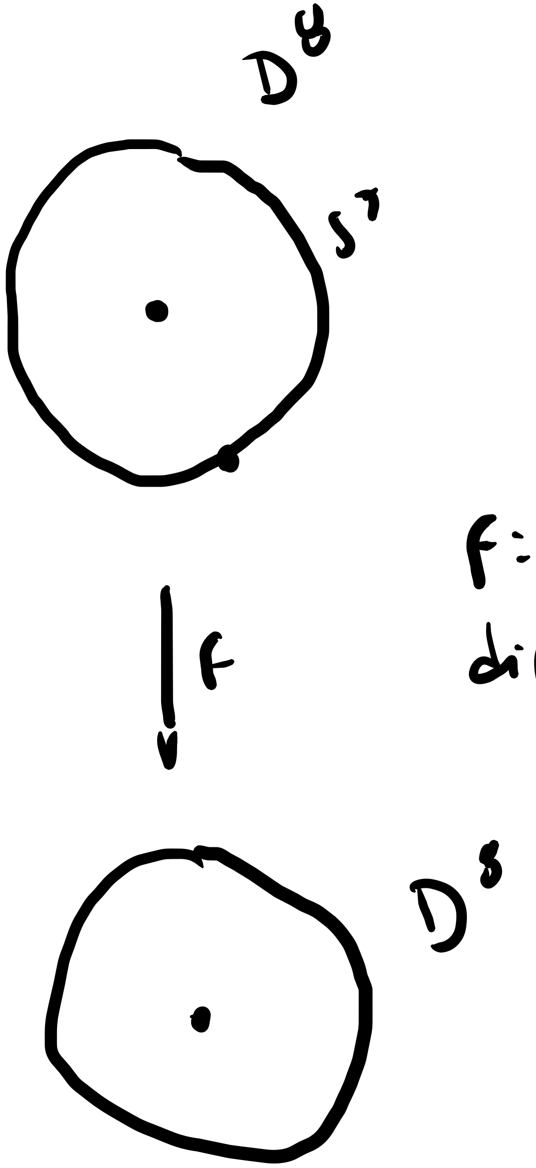
$$\Longrightarrow (i-j)^2 \equiv \pm 1 \mod 7$$

Conclusión: Si $SE_{ij} \overset{\text{difeo}}{\cong} S^7 \Rightarrow i+j=1$ e $(i-j)^2 \equiv \pm 1 \mod 7$.

Corolario: SE_{2-1} es una esfera exótica. $\blacksquare$

$\Theta_d = \left\{ \begin{matrix} d\text{-Esferas} \\ \text{homotópicas} \end{matrix} \right\} / \text{difeo.}$

$|\Theta_7| \geq 2$ $\qquad$ SE_{g-1}



$f: S^7 \to S^7$ difeo.

Kervaire y Milnor:

<u>Teorema</u>: Θ_d es un grupo abeliano finito y hay una sucesión exacta.

$$0 \to bP_{d+1} \to \Theta_d \to \operatorname{coker} J_d$$

cíclico de orden.