Última vez [Milnor]: Existen esferas exóticas.

¿Existen en otras dim? ¿Cuántas hay?

- $\{M^d \mid M^d$ es d-variedad suave homeo $S^d\}/\text{difeo}$

$$\Big\downarrow \cong \text{ si } (d \geq 6)$$

- $\Theta_d = \{M^d \mid M^d \text{ esfera homotópica}\}/h\text{-cobordismo}$

Sabemos: $\Theta_d \neq \phi$ y $|\Theta_7| \geq 2$.

$$0 \longrightarrow bP_8 \longrightarrow \Theta_7 \longrightarrow \overset{0}{\cancel{\operatorname{coker} J_7}}$$

$$bP_8 = \mathbb{Z}/28.$$

$$\left(J_7 : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{\pi_7 O}} \twoheadrightarrow \underset{\mathbb{Z}/24}{\underset{\parallel}{\pi_7^s}} \right)$$

- On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. (Annals)

- Groups of Homotopy Spheres (Kervaire y Milnor).

$$S^2 \times S^2 \longrightarrow S^4 \qquad \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \rightsquigarrow S^4.$$

Teorema [Kervaire-Milnor]: Θ_d es un grupo abeliano finito y hay una sucesión exacta:

$$0 \to bP_{d+1} \to \Theta_d \to \operatorname{coker}(J_d)$$

donde bP_{d+1} es un grupo cíclico y

$$J_d : \pi_d(O) \longrightarrow \pi_d^s$$

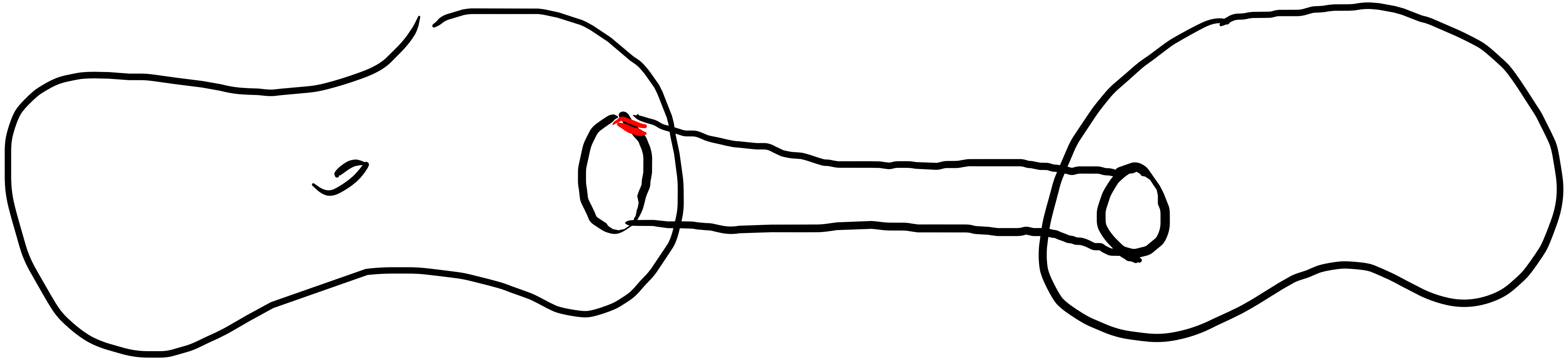
$$O = \operatorname{colim}(O(n)) \qquad \pi_d^s = \operatorname{colim}_k(\pi_{n+k} S^k)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_i S^l \xrightarrow{\Sigma} \pi_{i+1}(S^{l+1})$$

$$\boxed{\pi_d^s \otimes \mathbb{Q} = 0}$$

Obs: Orden de bP_{d+1} se conoce.

Estructura de grupo en $\underline{\Theta_d}$ = suma conexa.



$\Sigma, \Sigma' \in \Theta_d$: $\Sigma + \Sigma' := \Sigma \# \Sigma'$

$0 := S^d$

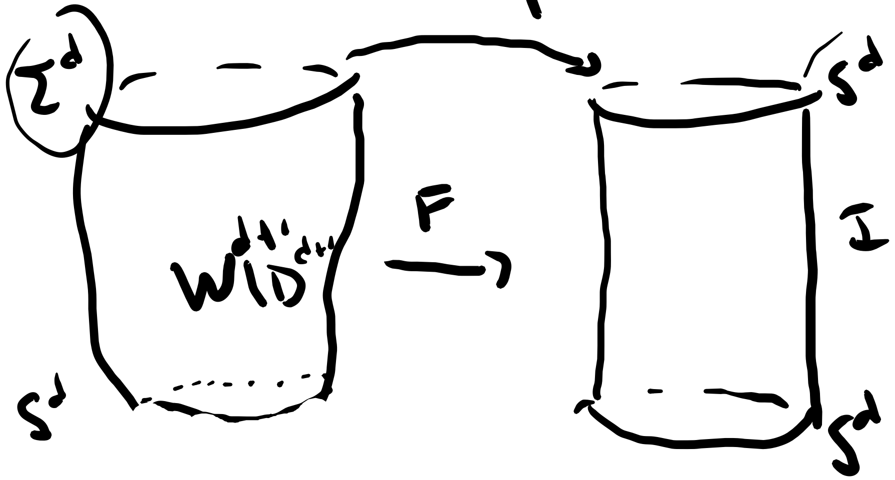
$\Sigma^{-1} := \overline{\Sigma}$

(Ej: Probar que $\Sigma \# \overline{\Sigma}$ es h-cob con S^d)

Criterio para reconocer al $0 = S^d \in \Theta_d$.

$\Sigma \in \Theta_d$ $(d \geq 5)$ es difeo a S^d sii Σ es la frontera de una variedad contraíble W (ie $\pi_i W = 0$ $\forall i$)

Dem: Ej.



$$bP_{d+1} = \{ \Sigma \in \Theta_d \mid \exists W^{d+1} \text{ tq } W^{d+1} \text{ es } \underline{\text{paralelizable}} \text{ y } \partial W = \Sigma \}$$

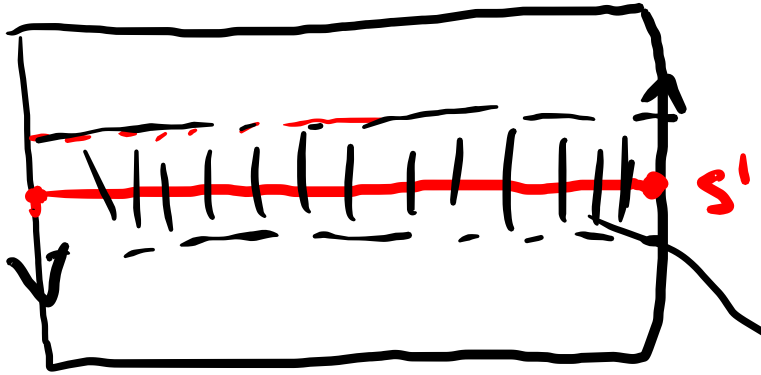
Paralelizable: TW = trivial $= W \times \mathbb{R}^{d+1}$

Establemente ∥zable: $TM^d \oplus \varepsilon^1$ es trivial

Si $\partial M \neq \emptyset$: Parallelizable $\iff$ establemente ∥zable

- M estable/ ∥zable $\Rightarrow$ $S^p \hookrightarrow M^d$ extiende a $S^p \times D^{d-p} \hookrightarrow M^d$

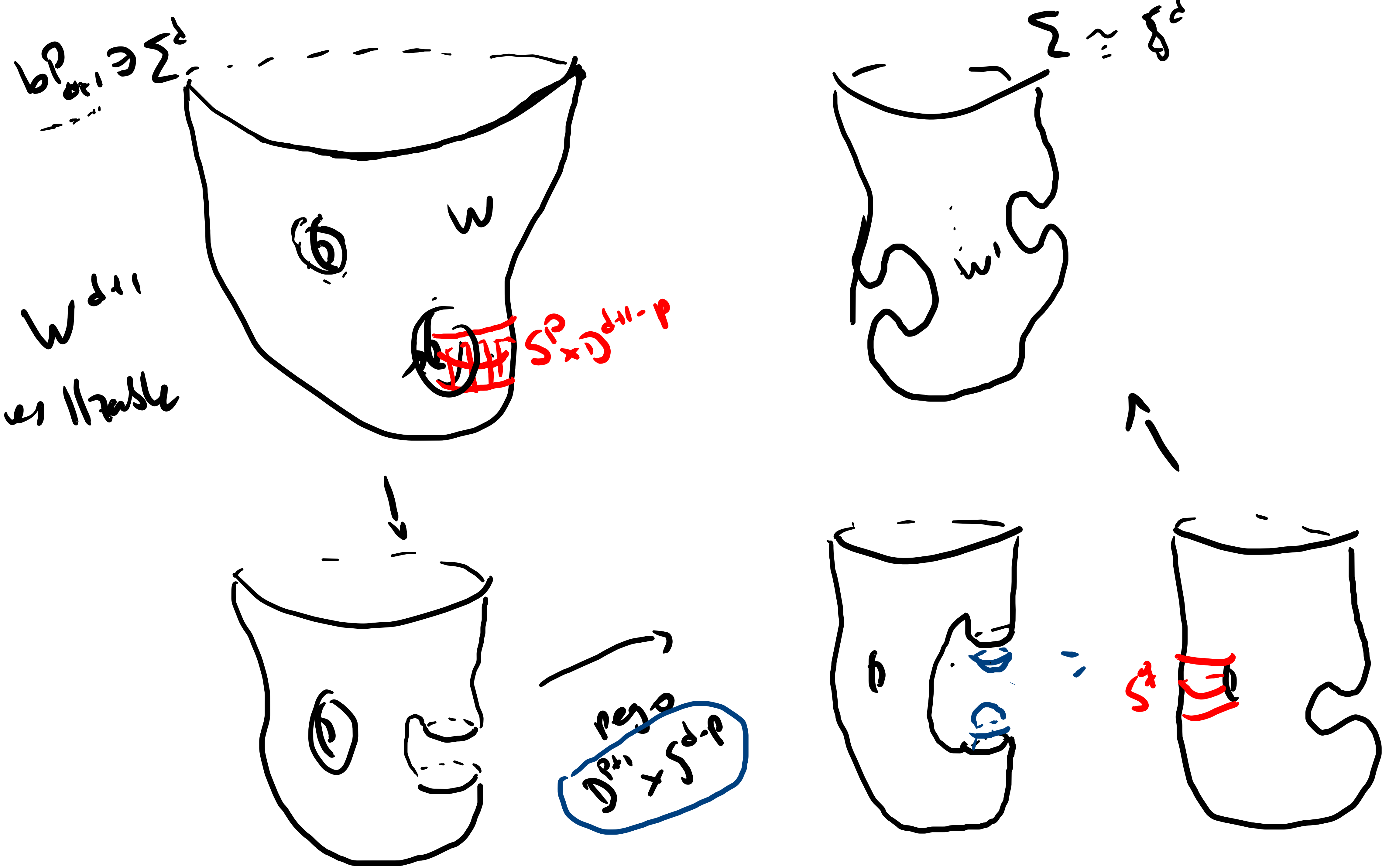
sí ~~[illegible]~~ es estable/ llizable.



, no es $S^1\times D^1$.

no es estable/ llizable

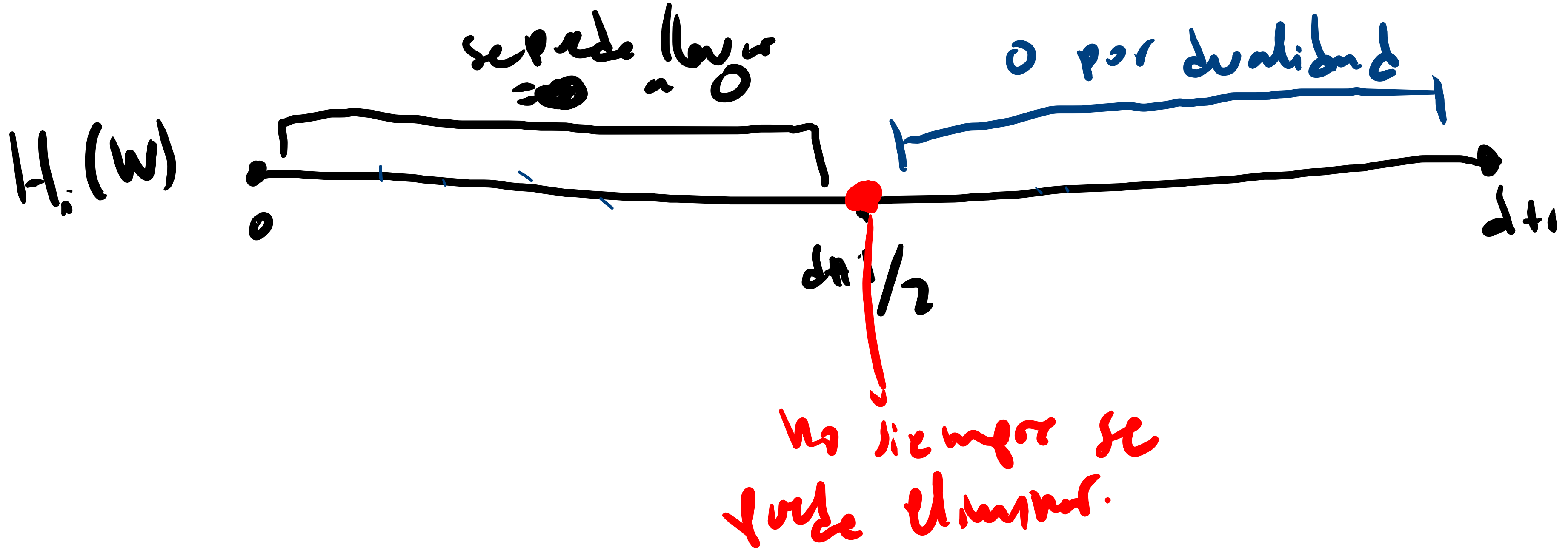
Estrategia para estudiar bP_{d+1}.



Lo que va a pasar:

Hoy { 1) Siempre se pueden eliminar los grupos de homotopía en grados $\frac{d}{2}-1$.

Próxima clase { 2) Hay obstrucciones para eliminar la homotopía (homología) en el grado de la mitad.

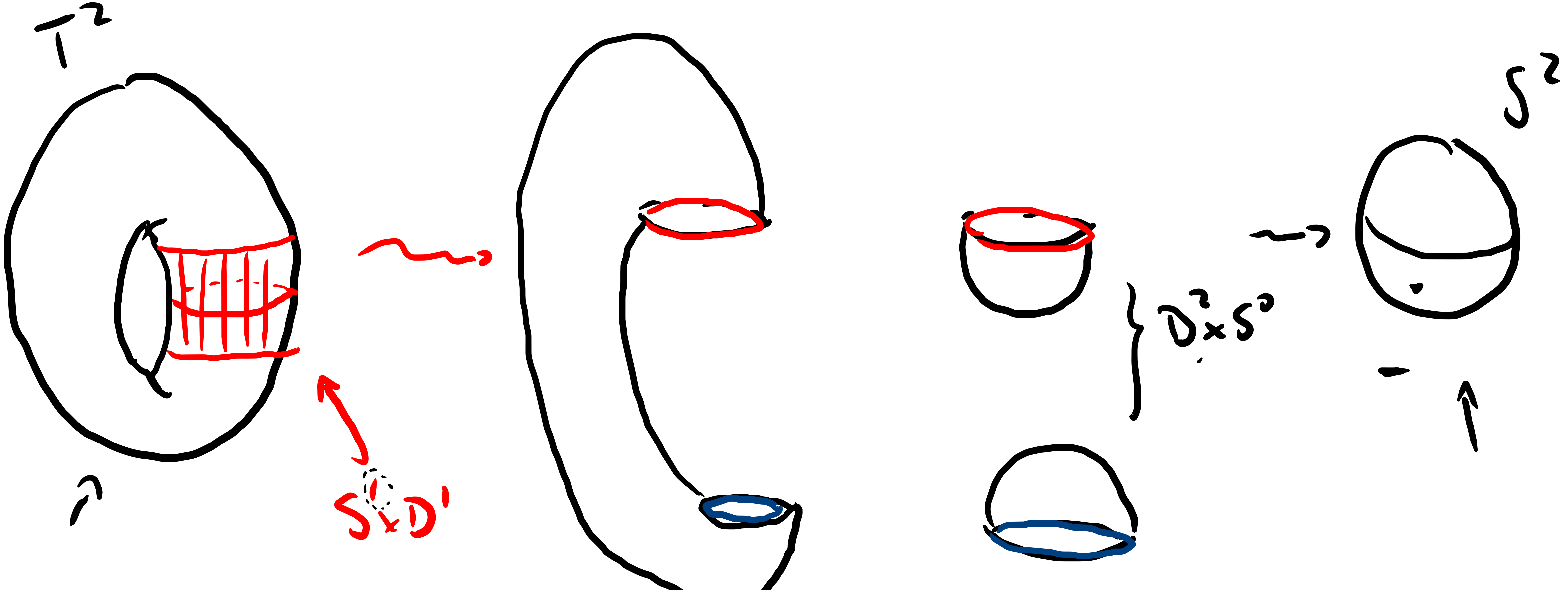


Cirugía: $\varphi : S^{p} \times D^{q+1} \hookrightarrow M^{d}$ $\quad (d = p+q+1)$

Observ: $\partial(S^{p} \times D^{q+1}) = S^{p} \times S^{q} = \partial(D^{p+1} \times S^{q})$

$$\chi(M,\varphi) := M \setminus \mathring{\mathrm{im}}(\varphi) \sqcup D^{p+1} \times S^{q} \Big/ \text{identifico fronteras.}$$

e.g.



- Si M y N son cobordantes

$\Longleftrightarrow$ M se puede obtener por cirugía a partir de N.

<u>Lema:</u> $\pi_k(\chi(M,\varphi)) \simeq \begin{cases} \pi_k M & k < \min(p,q) \\ \pi_p M / \Lambda \supset \langle \varphi \rangle & \end{cases}$

$d = p+q+1$

donde Λ contiene $\varphi|_{S^p \times \{0\}} : S^p \to M$.

Teorema: Sea M una variedad conexa estable/llzable de dim $d \geq 2k$

- Luego de una secuencia de cirugías sobre M es posible llegar a una variedad establemente llzable M' la cual es $\boxed{(k-1)}$-conexa.

Dem: M es compacta $\Rightarrow \pi_1 M = \langle \cancel{x_1}, \dots, x_r \rangle$ f.g.

$\alpha_i : S^1 \longrightarrow M^d \rightsquigarrow$ (Whitney): $\boxed{S^1 \xrightarrow{\alpha_i} M^d}$ se puede representar por un encaje.

$\hookrightarrow$ extiende a $\boxed{S^1 \times D^{d-1} \hookrightarrow M^d}$

$\rightsquigarrow$ Por cirugía la cambio a una M con $\pi_1 M = 0$.

En conclusión:

Si $\Sigma \in bP_{d+1} \Rightarrow \exists\, W$ estable/ $\|$zable

y $\boxed{\left(\frac{d+1}{2}-1\right)\text{-conexa}}$ t.q. $\partial W = \Sigma$