$$\Theta_d = \{\text{d-esferas homotópicas}\}/\text{h-cobordismo}$$

$$\cong \big\uparrow \; d \geq 6.$$

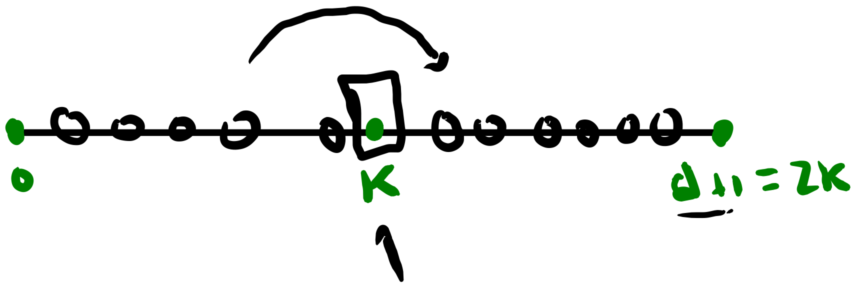
$$\{\text{d-variedades homeo a } S^d\}/\text{difeo}$$

$$bP_{d+1} = \{\Sigma \in \Theta_d \mid \exists\, W \text{ paralelizable t.q. } \partial W = \Sigma\}.$$

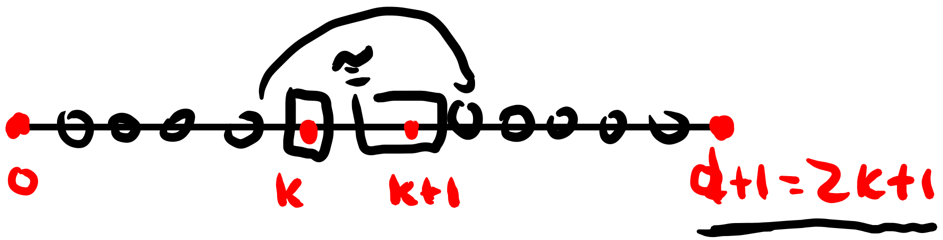
$$\|$$

Cirugía debajo de la dim del medio.

$$\{\Sigma \in \Theta_d \mid \exists\, W \text{ paralelizable } \left(\left\lfloor \tfrac{d+1}{2} \right\rfloor - 1\right)\text{-conexa t.q. } \partial W = \Sigma\}$$



$H_i(W)$



Teorema [Kervaire-Milnor]: El subgrupo $bP_{d+1} \subseteq \Theta_d$ es

i) trivial si $d+1 = 2k+1$,

ii) 0 ó $\mathbb{Z}/2$ si $d+1 = 4k+2$,

iii) cíclico de orden $a_k 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)\,\mathrm{num}\left(\frac{B_k}{4k}\right)$,

donde $a_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 2 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$ si $d+1 = 4k$

Obs: 1) Los B_k se llaman números de Bernoulli. Se definen por la serie de potencias: $\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1}{2!}z^2 - \frac{B_2}{4!}z^4 + \frac{B_3}{6!}z^6 - \dots$

2) El orden de bP_{d+1} se conoce para todo $d+1 \neq 126$ (¿!¿!¿!?)

3) Si $d+1=8 \Rightarrow \Theta_7 \cong bP_8 \cong \mathbb{Z}/28 \Rightarrow$ Hay 27 esferas exóticas $d=7$.

4) [Brieskorn]: • $V_k \subseteq \mathbb{C}^5$ la hipersuperficie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^{6k-1} = 0 \qquad k \in \{1,2,3,\dots\}$$

p. 421 Hartshorne

• $S^9 \subseteq \mathbb{C}^5$. una esfera "pequeña" con centro en $\vec{0}$.

$\Rightarrow \Sigma_k := V_k \cap S^9 \in \Theta_7$ y más aún, para $k=1,\dots,28$ se obtienen TODAS las estructuras suaves de la 7-esfera.

En lo queda vamos a discutir porqué bP_{4k} es cíclico.

La clave:

$\boxed{\text{Teorema (Cirugía en la mitad de la dimensión):}}$

Sea W^{4k} variedad suave Π-able con $\partial W \in \Theta_{4k-1}$. $(k\geq 2)$

Entonces W^{4k} puede transformarse en una variedad contraíble (y por tanto $\partial W \cong S^{4k-1}$) por medio de cirugías si y sólo si $\underline{\sigma(W)=0}$.

Recordar: $\sigma(W)$ es la signatura de $H^{2k}(W) \times H^{2k}(W) \xrightarrow{\smile} \mathbb{Z}$.

En este caso "$\smile$" es una forma bilineal, simétrica, unimodular, par.

Paréntesis algebraico: • V $\mathbb{Z}$-modulo libre f.g.

• $\mu : V \times V \longrightarrow \mathbb{Z}$ forma bilineal

• simétrica: $\mu(x,y) = \mu(y,x)$

• unimodular: $V \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Z})$ $\quad x \longmapsto \mu(x,-)$ es un iso.

• par: $\mu(x,x) \in 2\mathbb{Z}$

Teorema: $\mu : V \times V \longrightarrow \mathbb{Z}$ forma bilineal simétrica, unimodular, par.

Entonces a) $\sigma(\mu) \in 8\mathbb{Z}$!!

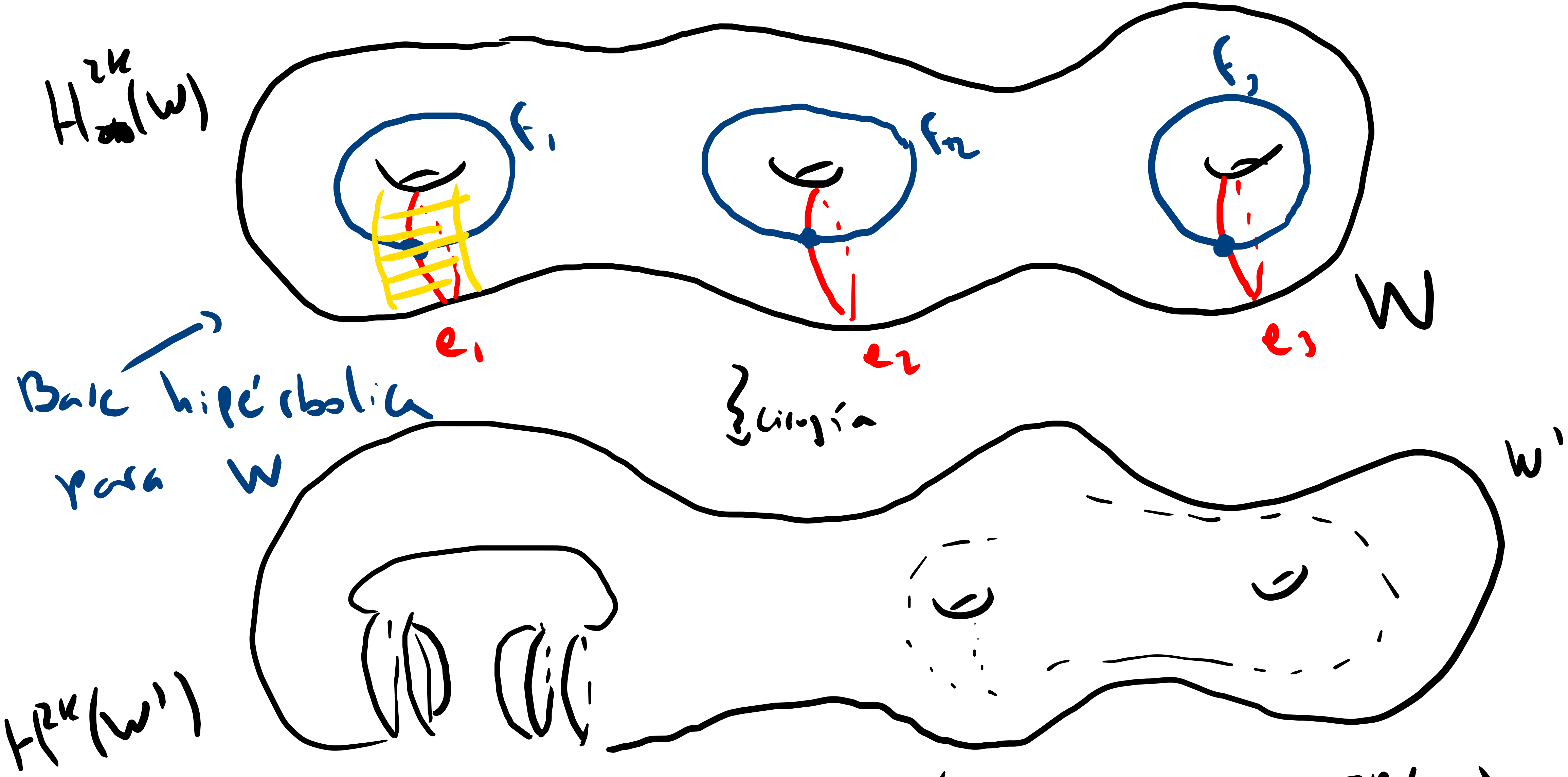
b) $\sigma(\mu) = 0$ sii $\exists$ base hiperbólica c.r.a. μ,

es decir, $\{e_1, f_1, \dots, e_g, f_g\}$ base de V tq

$\mu(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, $\mu(e_i, e_j) = 0 = \mu(f_i, f_j)$.

$\mu : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Geométricamente:



$$\text{rango } H^{2k}(W') < \text{rango } H^{2k}(W)$$

Usamos esto para estudiar bP_{4k}

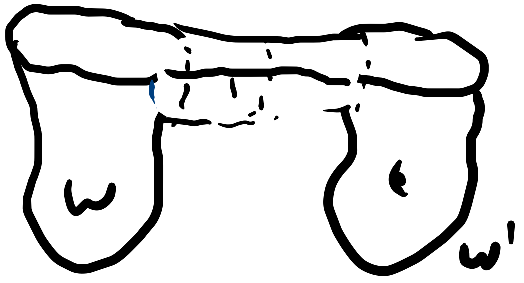
$$bP_{4k} \longrightarrow \mathbb{Z}/??$$

$$\Sigma \qquad \frac{\sigma(W_\Sigma)}{8} \qquad \partial W_\Sigma = \Sigma.$$

W_Σ llzable.

Si tomamos W'_Σ t.q. $\partial W'_\Sigma = \Sigma$ W'_Σ llzable:

$$\frac{\sigma(W_\Sigma) - \sigma(W'_\Sigma)}{8} = \frac{\sigma(W_\Sigma \natural \overline{W}'_\Sigma)}{8}$$



$\partial(W \natural W') = \partial W \# \partial W'$

$$\partial(W_\Sigma \natural \overline{W}'_\Sigma) = \Sigma \# \overline{\Sigma}$$
$$= S^{4k-1}$$

Concluimos:

$$X := \{ j \in \mathbb{Z} \mid \exists\, W^{4k} \text{ llzable},\ \partial W = S^{4k-1},\ \sigma(W) = j \}$$

es un subgrupo in $\mathbb{Z}$.

$$X = \langle \underline{\sigma_k} \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{ bP_{4k} \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathbb{Z} \Big/ \tfrac{\sigma_k}{8} \cdot \mathbb{Z} }$$

<u>Teorema</u>: Φ es un isomorfismo de grupos. Más aún $\sigma_k > 0$

$\Longrightarrow$ bP_{4k} es cíclico finito.

• Φ inyectivo: $\sigma(W_\Sigma) \equiv 0 \mod \sigma_k$

$\Rightarrow \exists\ N^{4k}$ llenable $\partial N^{4k} = S^{4k-1}$, $\sigma(N) = k$.

$\Rightarrow \sigma(W_\Sigma) = \ell\,\sigma(N)$.

$\Rightarrow \sigma(W_\Sigma \sqcup^{\ell} \overline{N}) = 0 \xRightarrow{\text{cirugía}}$ $W_\Sigma \sqcup^{\ell} \overline{N}$ se vuelve contraíble

• llenable

• $\partial(W_\Sigma \sqcup^{\ell} \overline{N}) = \Sigma \#^{\ell} S^{4k-1} \cong \Sigma$

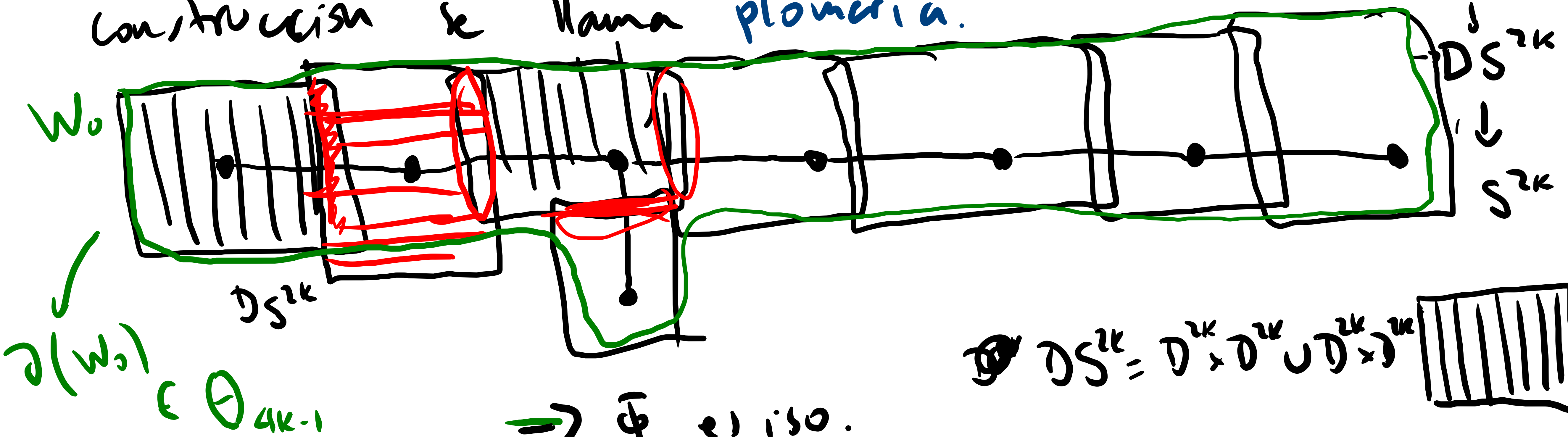
Σ es frontera de W contraíble $\Rightarrow \Sigma \cong S^{4k-1}$.

$\Rightarrow bP_{4k}$ es cíclico.

Φ es sobre: Basta con encontrar

- W_0 paralelizable
- $\partial W_0 \in \Theta_{4k-1}$
- $\sigma(W_0) = 8$.

La existencia de W_0 se debe a Kervaire-Milnor. La construcción se llama plomería.



$DS^{2k} = D^{2k} \times D^{2k} \cup D^{2k} \times D^{2k}$

$\Rightarrow \Phi$ es iso.

• $\sigma_k > 0$. ($\Rightarrow \mathbb{Z}/\sigma_k$ es finito).

Teorema de la signatura:

$$\sigma(M^{4k}) = \frac{2^{2k}(2^{2k-1})B_k}{(2k)!} P_k(M^{4k}) + \text{términos de orden inferior}$$

cerrada

Cálculos de Adams sobre homomorfismo J.

$$0 \longrightarrow bP_{d+1} \longrightarrow \boxed{\Theta_d \longrightarrow \boxed{\mathrm{Coker}\, J_d}}$$

Teoría de homotopía.

$d+1 = 4k+2$

$$bP_{d+1} \longrightarrow \Theta_d \xrightarrow{\Phi} \mathbb{Z}/2$$

finitos. [Serre]

$$J_d : \underline{\pi_d\, \Theta} \longrightarrow \underline{\pi_d^S}$$