EXPOSICIONES FINALES MAT2218
ÁLGEBRA ABSTRACTA II
MIÉRCOLES 3 DE DICIEMBRE DE 2014
9:00-13:00, SALA 1, CHARLAS 25 MINUTOS MÁX

Contents

1. Números reales construibles con regla y compás
Carlos Bastías

Del texto guía del curso, "Algebra: A Graduate Course" por I. M. Isaacs, tenemos

Corolario (20.19): *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es construible, entonces α es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y $|\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}|$ es una potencia de 2.*

El recíproco de este corolario no es cierto, o sea, existe al menos un número entero positivo n tal que, existe un número real α no construible con regla y compás para los cuales $|\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}| = 2^n$. En esta ocasión demostraremos un resultado más fuerte, el cual enunciamos a continuación.

Proposición: *Para cada $n \geq 2$ existe un número real α no construible con regla y compás tal que $|\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}| = 2^n$.*

La demostración de esta proposición será por inducción sobre n. Para el caso inicial de la inducción $n = 2$, demostraremos que, si E

es el cuerpo de descomposición de $p(x) = x^4 - 10x^2 - 4x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, entonces $Gal(E\backslash\mathbb{Q}) \cong A_4$. Conociendo los subgrupos de A_4, será fácil ver que α no puede ser construible con regla y compás, con α raíz real de $p(x)$. Con esto demostrado, el caso general será simple de demostrar.

2. Planos projectivos
Camila Guzmán

Un plano proyectivo $\prod$ de define como la tripleta $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{P}$ es un conjunto de elementos llamados *puntos*, $\mathcal{L}$ es un subconjunto de $2^{\mathcal{P}}$ donde sus elementos se llaman *rectas* e $\mathcal{I}$ es una *Relación de Incidencia* entre puntos y rectas que cumple con las siguientes condiciones:

i) Dados dos puntos distintos, existe exactamente una recta que pasa por ambos puntos.
ii) Dadas dos rectas distintas, existe exactamente un punto que pertenece a ambas rectas.
iii) Dado cuatro puntos, hay tres que no pertenecen a una misma recta.

Un plano proyectivo se dice finito si el conjunto $\mathcal{P}$ es finito.

Bajo esta definición, se estudiarán características de estos planos finitos, y se estudiará más especficamente el caso de un plano proyectivo sobre un cuerpo finito, como por ejemplo, cómo se construyen estos planos a partir de un cuerpo finito y la relación entre el orden del cuerpo y los puntos del plano. Finalmente, se verán a través de ejemplos geométricos las diferencias entre un plano proyectivo sobre un cuerpo de característica cero y uno en característica positiva.

3. Resolución de ecuaciones de grado 3 y 4 por radicales
José Ignacio Harismendy

En la siguiente presentación se estudiará cómo resolver ecuaciones de grado 3 y 4 por radicales. Veremos a grandes rasgos cómo ha ido evolucionando la teoría de resolución de estas, y los métodos respectivos que se han ido desarrollando.

Iniciaré la presentación resolviendo las ecuaciones de grado 2 y 3 de una manera particular, y luego se resolverá la de grado 4 con un método general que sirve para las anteriores y que dejará en evidencia por qué las ecuaciones de grado mayor o igual a 5 no pueden resolverse por radicales.

El objetivo principal de esta presentación será que una persona que no tiene conocimientos generales de álgebra pueda comprender cuándo y por qué una ecuación de algún grado puede resolverse por radicales.

4. Clasificación de grupos simples finitos
Eduardo Oregón

Comenzaremos enunciando el teorema de Jordan-Holder, que nos permite entender los grupos simples como los "ladrillos" que forman a los grupos finitos (así como primos son la base de los números enteros).

Daremos ejemplos de estos grupos y mencionaremos algunas consecuencias del teorema de clasificación, el cual nos caracteriza todos los posibles grupos simples finitos, salvo isomorfismos (18 familias infinitas y 26 grupos "esporádicos").

5. Demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra
Ricardo Vargas

El Teorema Fundamental del Álgebra (T.F.Al) establece que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, lo cual es una propiedad algebraica. Sin embargo, no hay demostraciones puramente algebraicas conocidas de este teorema. El objetivo de esta presentación es estudiar las diversas demostraciones del T.F.Al, las cuales utilizan argumentos de álgebra, topología algebraica, geometría riemanniana y análisis complejo. En particular entender los pasos cruciales en los que se requieren herramientas externas al álgebra y entender lo algebraico en cada demostración.

6. Avances en el problema inverso de Galois
José Ignacio Yáñez

Sea F un cuerpo y G un grupo finito. El problema inverso de Galois consiste en una parte en existencia y una de construcción, es decir:

1. Determinar cuando existe una extensión de Galois $E \supset F$ tal que $\mathrm{Gal}(E/F) \cong G$.
2. Si G es realizable como un grupo de Galois sobre F, encontrar explícitamente la extensión E o el polinomio $f \in F[X]$ tal que tenga a G como grupo de Galois.

En clases demostramos el caso para G abeliano con cuerpo base $\mathbb{Q}$ y caracterizamos los grupos de Galois de extensiones de cuerpos finitos $\mathbb{F}_p$.

En esta charla se mostrarán avances que ha tenido este problema, mostrando ejemplos de grupos que son realizables como grupo de Galois de una extensión, como también construcciones explícitas de extensiones.