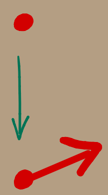
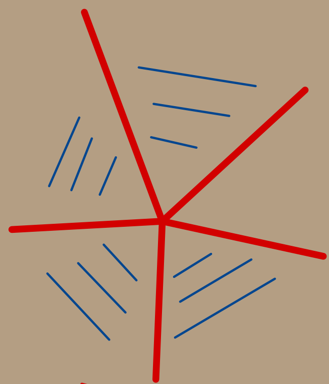
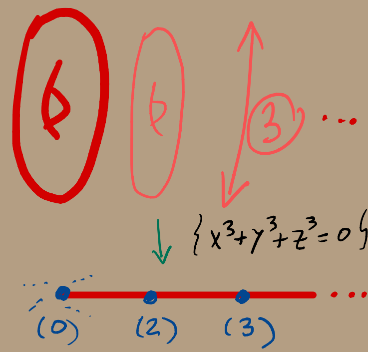
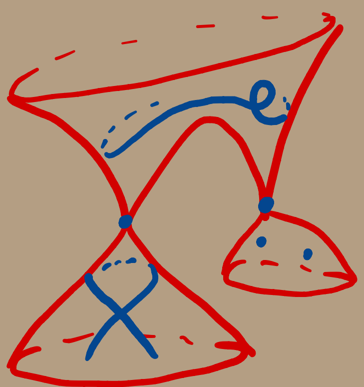
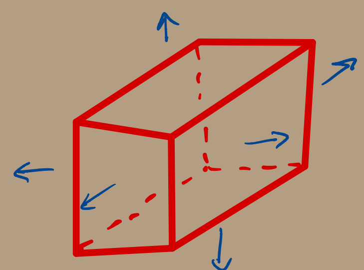
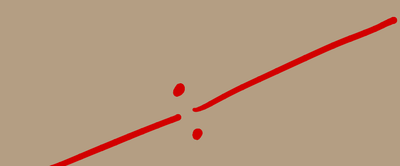












ga10

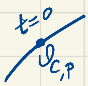
16/Sept/21

Esquemas y
Variedad abstracta

Vimos definición de esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ como espacio localmente anillado tal que para todo punto tenemos vecindad afín.

DVR.

<u>Ej 2.3.2</u> : R = anillo val. discreta = dominio Noeth local $\mathfrak{m} = (t)$
"los anillos locales en curvas suaves"



$$\mathrm{Spec}(R) = \{ \underset{t_1}{\overset{\shortparallel}{(0)}}, \underset{t_0}{\overset{\shortparallel}{\mathfrak{m}}} \}$$ $\{t_0\}$ cerrado $\{t_1\}$ abierto denso

$K = K(R)$ cuerpo de fracciones $\therefore$ $R \hookrightarrow K$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$, $(0) \mapsto t_1$.

¡Pero! $\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(R)$, $(0) \mapsto t_0$ es continua y tenemos $R \hookrightarrow K$ para los haces:

$$\mathcal{O}(\mathrm{spec} R) = R \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{spec} K) = K$$
$$\mathcal{O}(\{t_1\}) = K \longrightarrow 0$$

$\therefore$ Es de espacios anillados

Así no es el inducido.

$f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} K}(U)$
$\shortparallel$
$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} K}(f^{-1}(U))$
$\swarrow$ $\searrow$
K $\{0\}$

- Un ejemplo menos raro : $\mathrm{Spec}\left(k[t]/(t^2)\right) = \{ (t) \}$

$(t) \ni a + bt$

¡parece un miserable cuerpo! pero no es así...

$$k[x,y] \xrightarrow{\varphi} k[t]/(t^2)$$
$$x \mapsto a + bt$$
$$y \mapsto c + dt$$
$$\Rightarrow \varphi^{-1}((t)) = (x-a, y-c)$$

$\mathbb{A}^2_k$
$\shortparallel$
$\mathrm{Spec}(k[t]/t^2) \to \mathrm{Spec}(k[x,y])$
$\mathrm{pt} \mapsto (a,b)$

Pero el morfismo también tiene un dato (b,d)

$$\mathrm{Spec}\left(k[t]/(t^2)\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(k[x,y]\right)$$

$$\bullet \longmapsto \underset{(a,c)}{\bullet} \nearrow \binom{b}{d}$$

[Un caso sería: $\mathrm{Spec}\left(k[t]/(t^2)\right) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\left(k[x,y]\right)$

$$\bullet \longmapsto (y)$$

lo cual es continuo y en haces tendríamos

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(\mathcal{U})) = \begin{cases} k[t]/(t^2) & , (y) \in \mathcal{U} \\ 0 & , \text{sino}. \end{cases}$$]

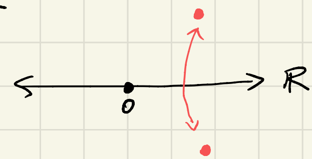
De hecho: Dado k cuerpo cualquiera,

$\mathbb{A}^1_k :=$ recta afín sobre $k := (\mathrm{Spec}(k[x]), \mathcal{O})$

$$\mathbb{A}^1_k = \{\underbrace{\xi = (0)}_{\overline{\xi} = \text{todo}},\ \text{polinomios mónicos irreducibles}\}$$

Si $k = \overline{k} \Rightarrow \{\xi, \text{puntos}\} = \mathbb{A}^1_k$

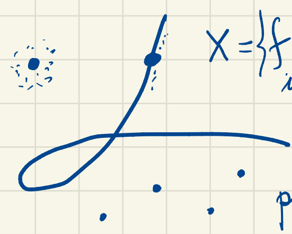
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x] & \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) & (x-i) \quad (x+i) \\ \uparrow \ \text{alg} \to \text{geom.} & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R}[x] & \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]) & (x^2+1) \end{array}$$



$\mathbb{A}^2_k := \mathrm{Spec}(k[x,y])$

plano afín

$k = \overline{k}$



$X = \{f(x,y) = 0\}$ irred

puntos cerrados

Ej 2.3.5 : X_1, X_2 esquemas $\mathcal{U}_1 \subseteq X_1$ $\mathcal{U}_2 \subseteq X_2$ abiertos y $\varphi : (\mathcal{U}_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{\mathcal{U}_1}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{U}_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{\mathcal{U}_2})$

isomorfismo de esp. loc. anillados.

Sea $X := X_1 \amalg X_2 \big/ {\varphi(x_1) \sim x_1}$ con topología cociente

[Así hay $X_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} X$ y $X_2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} X$ tal que

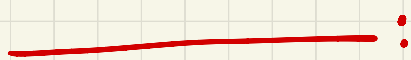
$V \subseteq X$ abierto $\iff$ $i_j^{-1}(V)$ es abierto en X_j]

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ \langle s_1, s_2 \rangle \,/\, s_j \in \mathcal{O}_{X_j}(i_j^{-1}(V)) \quad \varphi^{\#}\left(s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap \mathcal{U}_1}\right) = s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap\mathcal{U}_2} \right\}$$

∴ $\mathcal{O}_X$ es haz de anillos y $(X, \mathcal{O}_X)$ es loc. anillado.

Como X_1, X_2 son esquemas $\Rightarrow$ X es esquema.

Ej 2.3.6 : Así tomar $\mathbb{A}^1_k$ y sacar un punto, digamos (t) y pegar $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathbb{A}^1_k \setminus (t)$

$X =$ 

(pegado de arriba)

∴ X no es afín : [Como $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow X$ y una sección de $\mathcal{O}(X)$ está determinada por un polinomio en uno de los $\mathbb{A}^1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(X) = k[x]$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[x])$ $\qquad$ $k[x] \longrightarrow k[t]$

$x \longmapsto f(t)$

pero se identifican puntos cerrados $\Rightarrow$ isomorfismo
$\Rightarrow$ no hay espacio para otro punto!]

La otra identificación $k[x]_x \equiv k[u]_u$ $x \mapsto \frac{1}{u}$
construye $\mathbb{P}^1_k$. Es el siguiente tema:

Esquemas a partir de anillos graduados:

S = anillo graduado $= \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ $\quad S^+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$

$\mathrm{Proj}(S) := \{ \mathfrak{p} \text{ primos homogeneos } \not\supset S^+ \}$

$\mathfrak{a}$ ideal homogeneo $\Rightarrow V(\mathfrak{a}) := \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \,/\, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \}$

$\therefore \quad V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \qquad V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$

$\therefore$ Tenemos topología en $\mathrm{Proj}(S)$: $\{V(\mathfrak{a})\}$ = los cerrados

Recordar

$S_{(\mathfrak{p})}$ = cocientes de grado cero en $S_\mathfrak{p}$

Para $\mathcal{U} \subset \mathrm{Proj}(S)$ abierto,

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{array}{l} s : \mathcal{U} \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} S_{(\mathfrak{p})} \\ \bullet\ s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})} \\ \bullet\ s \text{ es localmente cociente de elementos en } S: \\ \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{U},\ \exists V \subset \mathcal{U},\ \mathfrak{p} \in V,\ a, f \in S_d\ \forall d \\ \text{tal que } \forall \mathfrak{q} \in V,\ f \notin \mathfrak{q} \text{ y } s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \text{ en } S_d \end{array} \right\}$$

es un haz de anillos en $\mathrm{Proj}(S)$.

<u>Prop 2.5</u>: (a) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq S_{(\mathfrak{p})}$

(b) $f \in S_+$, $D_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) : f \notin \mathfrak{p} \}$

homo. $\Rightarrow$ $D_+(f) = \mathrm{Proj}(S) \setminus V((f))$ es abierto.

Además $D_+(f)$ cubren a $\mathrm{Proj}(S)$ y

$$\left(D_+(f), \mathcal{O}\big|_{D_+(f)} \right) \simeq \mathrm{Spec}\left(S_{(f)}\right),$$

donde $S_{(f)}$ = elementos grado cero en S_f.

(c) $\mathrm{Proj}(S)$ es un esquema.

<u>Dem</u>: Media página en Hartshorne ∎

<u>Ej 1</u>.- A anillo cualquiera, se define el <u>n-espacio proyectivo</u> sobre A como $\mathbb{P}^n_A := \mathrm{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$.

[Si $A = k = \overline{k}$, $\mathbb{P}^n_k$ es el esquema que tiene al subespacio de los puntos cerrados $\simeq$ a la variedad espacio proyectivo old fashion]

<u>Def 1</u>.- S esquema fijo. <u>X esquema sobre S</u> significa $X \to S$ y morfismos son

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\square"] & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

. $\mathrm{Sch}(S)$ categoría y $\mathrm{Sch}(A) := \mathrm{Sch}(\mathrm{Spec}\,A)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \end{tikzcd}$$

k-alg

$k \longleftrightarrow \mathcal{O}(X)$

Prop: $k=\overline{k}$. Existe functor fully faithfull

$$t : \mathrm{Var}(k) \longrightarrow \mathrm{Sch}(k).$$

$$\left[\text{ie} \quad \mathrm{Hom}_k(X,Y) \xrightarrow[\text{biy}]{} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(k)}(t(X), t(Y))\right]$$

Dem: Solo el inicio, ver detalles en Hartshorne.

$$X \in \mathrm{Var}(k) \longmapsto t(X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{conj irreducibles} \neq \phi \text{ cerrados} \\ \text{de } X \end{array} \right\}$$

$$Y \subset X \text{ cerrado} \Rightarrow t(Y) \subset t(X)$$

$\therefore$ tenemos topología $\{t(Y)\}_{\substack{Y\subset X \\ \text{cerrado}}} =$ conj cerrados

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \Rightarrow \quad t(X) \xrightarrow{t(f)} t(Y)$$

$$t(f)\left(\begin{array}{c}\text{cerr} \\ \text{irred}\end{array}\right) := \overline{f(\text{irred})}$$

Estamos con la topología. Ahora definir

$$\alpha : X \longrightarrow t(X)$$

$$\alpha(P) = \overline{\{P\}}$$

$\supset V$, luego biyección entre abiertos $\mathcal{O}_X(\alpha^{-1}(V))$

$\Rightarrow (t(X), \alpha_* \mathcal{O}_X)$ será el esquema sobre

k $\quad [k \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(t(X), \alpha_* \mathcal{O}_X)]$

... (fully faithfull) ∎

Se caracterizará su imagen en el futuro (Prop. 4.10).

- Esquemas reducidos ... Ejercicios 2.1 al 2.19
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ objeto final