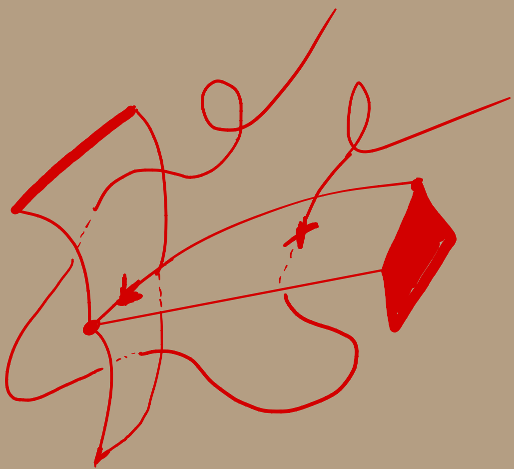


ga11

21/Sept/21

1eros prop de esquemas

- X = esquema. Se define <u>cuerpo residual</u> de $p \in X$ como $k(p) := \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$.

[notar que para variedades sobre k, los puntos cerrados tienen cuerpo residual k, pero ya no es el caso para esquemas sobre k e.g. $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[x])$, $\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$]

Si K es cuerpo $\Rightarrow$ $\left\{ \operatorname{Spec} K \to X \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \in X \text{ y} \\ k(p) \subset K \end{array} \right\}$.

$\Rightarrow$) Si $\operatorname{Spec} K \longrightarrow X$, sea p la imagen, $\exists \operatorname{Spec}(A) \ni p$
$\Rightarrow$ $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} A$ $\Rightarrow$ $A \xrightarrow{\varphi} K$ con $\varphi^{-1}((0)) = p$
$\Rightarrow$ $A_p \to K_{(0)} = K$ $\Rightarrow$ $A_p/\mathfrak{m}_p = k(p) \hookrightarrow K$.

$\Leftarrow$) $A \to A_p \to k(p) \hookrightarrow K \Rightarrow \operatorname{Spec} K \longrightarrow \operatorname{Spec} A \hookrightarrow X$ ∎

Se define también el <u>espacio tangente Zariski</u> T_p de X en $p \in X$ como el dual del $k(p)$-espacio vectorial $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. Entonces:

$$\left\{ \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} p \in X & \text{con } k(p) = k \\ \downarrow & \\ \operatorname{Spec}(k) & \text{y } \xi \in T_p \end{array} \right\}$$

Entretenerse en caso y comparar con curvas planas en el Fulton: ¿Qué sucede en el

Caso singular?

[Para más sobre esto, mirar Functor de puntos, Yoneda, problemas moduli y representabilidad, etc "Geometry of Schemes"]

§3. Primeras propiedades de esquemas.

Def.- Un esquema es <u>conexo</u> si lo es como espacio topológico. Es <u>irreducible</u> si lo es como espacio topológico.

Ej.- $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ conexo e irred.

$\mathrm{Spec}(k[x,y]/(xy))$ reducible.

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})$ disconexo. [<u>Tarea</u>: 2.19 Caracteriza Spec A disconexo]

Def.- Un esquema X es <u>reducido</u> si para todo abierto $\mathcal{U}\subset X$, $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ no tiene elementos nilpotentes. Equivalente (Tarea):

X reducido $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,p}$ no tienen elementos nilpotentes $\forall p$.

Def.- Un esquema X es <u>integral</u> si $\forall\, \mathcal{U}\subset X$ abierto, $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ es dominio.

Ejl.- Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, entonces

X irreducible $\iff$ $\mathrm{nil}(A)$ es primo
X reducido $\iff$ $\mathrm{nil}(A) = (0)$
X integral $\iff$ A es dominio.

Dem: • $\mathrm{nil}(A) = \{a \in A : a^n = 0 \ \exists n\} = \sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ primo}} \mathfrak{p}$.

• Si $\mathrm{nil}(A)$ primo y $X = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

Digamos $\mathrm{nil}(A) \in V(\mathfrak{a}) \Rightarrow \mathfrak{a} \subset \overbrace{\sqrt{(0)}}^{=\mathrm{nil}(A)} \subset \mathfrak{p} \quad \forall \mathfrak{p}$ primo
$\Rightarrow V(\mathfrak{a}) = X$ y así X irreducible.

Si $\mathrm{nil}(A)$ no primo $\Rightarrow \exists a, b \in A$ $ab \in \mathrm{nil}(A)$
y $a, b \notin \mathrm{nil}(A) \Rightarrow X = V((a)) \cup V((b))$

$$V((a)) \cup V((b)) = V((ab))$$

pero $(a) \not\subset \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p}$
ni $(b) \subset \mathfrak{p}$

$(ab) \subset \mathrm{nil}(A) \subset \mathfrak{p}$

$\therefore$ X reducible.

hacer los otros similarmente ∎

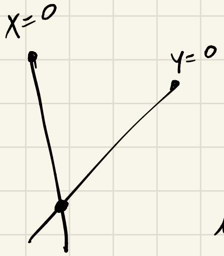
Ejl.- $\mathrm{Spec}\left(k[x,y]/(xy)\right)$ reducido
reducible

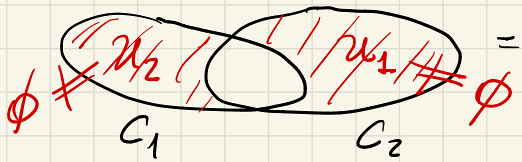
$\mathrm{Spec}\left(k[x,y]/(x^2y)\right)$ reducible
pero no reducido

$\mathrm{Spec}\left(k[t]/(t^n)\right)$ irreducible no reducido.

Prop 3.1 X integral $\iff$ reducido e irreducible.

Dem: $\Rightarrow$) Integral $\Rightarrow$ reducido. Si X es reducible $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \neq \phi$ abiertos con $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \phi$





$= X$

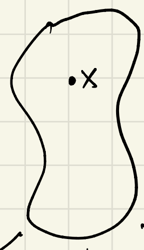
y $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) = \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_1) \times \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_2)$

$(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$

$\Rightarrow$ no es dominio $\rightarrow\leftarrow$ $\therefore$ X es irreducible.

$\Leftarrow$) Suponer X reducido e irreducible.

f_x o $g_x \in \mathfrak{m}_x$ Sea $\mathcal{U} \subset X$ abierto, $f, g \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ con $f\cdot g = 0$.



Sean $Y = \{x \in \mathcal{U} : f_x \in \mathfrak{m}_x\}$, $Z = \{x \in \mathcal{U} : g_x \in \mathfrak{m}_x\}$

notar que $\mathcal{U} = \underbrace{Y \cup Z}$ y ambos son cerrados (Ej. 2.16). ya que $g\cdot f = 0$ $\therefore$ $f_x \in \mathfrak{m}_x$ o $g_x \in \mathfrak{m}_x$.

$f_x \notin \mathfrak{m}_x$
f_x es unidad en $\mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x \Rightarrow f$ unidad $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$
$\Rightarrow g = 0$.

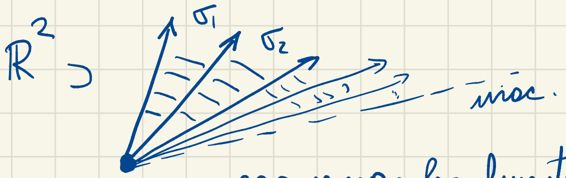
Como X es irred $\Rightarrow \mathcal{U}$ es irred y así $Y = \mathcal{U}$ (digamos)

$\Rightarrow f$ restringido a todo afín en $\mathcal{U}$ es nilpotente (Parte de la tarea)

$\Rightarrow f = 0$ en cada afín $\Rightarrow f = 0$ en $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ ∎

Def X esquema es <u>localmente Noetheriano</u> si puede ser cubierto con $\mathrm{Spec}(A_i)$ donde A_i es Noetheriano.

X es <u>Noetheriano</u> $\iff$ loc. Noetheriano y cuasi-compacto (ie todo cubrimiento abierto tiene subcubr. finito)



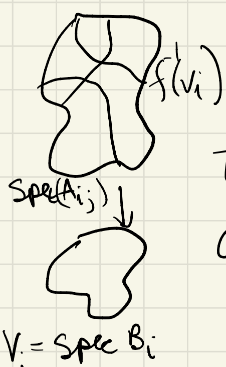
esquema localmente Noeth no Noetheriano..

si aparece en Geo-alg.

<u>Prop 3.2</u> : X esquema loc. Noetheriano $\iff$
$\forall\, \mathcal{U} \subset X$ abierto afín, $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A)$
A es Noetheriano.

<u>Dem</u>: ($\Leftarrow$) obvio por definición.
$\Rightarrow$) no obvio y mirar en Hartshorne. ∎

Def.- Un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ de esquemas es <u>localmente de tipo finito</u> si existe cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}\, B_i$ tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ se puede cubrir por abiertos afines $\mathcal{U}_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$ donde A_{ij} es B_i-álgebra finitamente generada.



$B_i \to A_{ij} \ni z_{ij1}, \ldots, z_{ijr}$

El morfismo f es de <u>tipo finito</u> si los $f^{-1}(V_i)$ pueden ser cubiertos por # finito de $\mathcal{U}_{ij}$ (arriba).

$\boxed{\text{Def}}$.- $X \xrightarrow{f} Y$ es <u>finito</u> si existe cubrimiento de Y por abiertos $V_i = \operatorname{Spec} B_i$ tal que

$$f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec}(A_i)$$

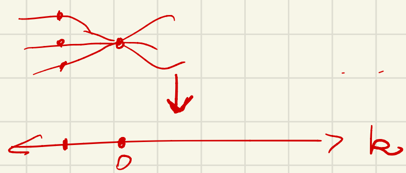
con A_i una B_i-álgebra la cual es un B_i-módulo finitamente generado.

Ej 1.- $k[x] \ni x(x-1)$ $\qquad \overset{B}{\overset{\shortparallel}{k[x]}} \hookrightarrow \overset{A}{\overset{\shortparallel}{k[x,y]/(y^3 - x(x-1))}}$

$$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[x]) \xleftarrow[\text{finito}]{} \operatorname{Spec}(\;''\;)$$

$\overset{\shortparallel}{k}$

check $\neq 3$



El problema será: ¿Cómo construir ejemplos no afines? ¿Cómo "pegar" estos morfismos finitos afines?