ga 12

23/Sept/21

Prop. 2

y final

... $\boxed{\text{Def}}$.- (Subesquema abierto)

X esquema, $\mathcal{U}$ es un subesquema abierto de X si $\mathcal{U} \subset X$ abierto y $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}$. Una <u>inmersión abierta</u> es un morfismo $f: Y \to X$ la cual induce isomorfismo de Y con un subesquema abierto de X.

Ejl.- $A \longrightarrow A_f$, $f \in A$. Entonces,

$$\operatorname{Spec} A_f \hookrightarrow D(f) \subset \operatorname{Spec} A.$$

Si $A = k[x,y]$ y $B = k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$
$\Rightarrow \operatorname{Spec} A = \mathbb{A}^2_k$, $\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} k[x,x',y,y'] / (xx'-1, yy'-1)$

Pero $k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] = k[x,y]_{xy} \ni x^{-1} = \frac{y}{xy}$, $y^{-1} = \frac{x}{xy}$

$$\therefore \quad \underset{(k^*)^2}{\underset{\|}{\operatorname{Spec}(B)}} \subset \underset{k^2}{\underset{\|}{\operatorname{Spec}(A)}} \qquad B = A_{xy}$$

(puntos cerrados)

$\boxed{\text{Def}}$.- (Subesquema cerrado) $Y \xhookrightarrow{i} X$ inclusión, Y es cerrado en X, Y es un esquema y $i^\# : \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$ es sobre. Una <u>inmersión cerrada</u> es un $Z \xrightarrow{f} X$ isomorfismo con algún sub-esquema cerrado en X.

Ej.- A anillo y $\mathfrak{a} \subset A$ ideal,

$\Rightarrow$ $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ nos induce

$$Z = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow[\text{homeo.}]{f} V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec}(A) = X$$

y $f^{\#}: \mathcal{O}_X \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Z$ es el inducido por $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ sobre, con lo cual $V(\mathfrak{a})$ adquiere estructura de esquema y es subesquema cerrado.

$\therefore$ ¡$V(\mathfrak{a})$ tiene muchas estructuras de esquemas, corresp a $\mathfrak{b} \subset A$ tal que $V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a})$!

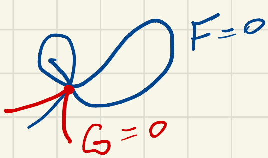
[Toda estructura de esquema en un cerrado aún proviene de ideales. (3.11(b))]

Ej.Ej.: $A = k[x,y] \supset (x,y)$

$$\begin{array}{ccc} & (x,y) & \\ \cup & & \cup \\ (x^2,y) & & (x,y^5) \\ \cup & & \cup \\ & (x^5, x^3y, y^5) & \end{array} \quad \dots$$

todos para $(0,0)$

¿Cómo esto aparece en la naturaleza?



con $(0,0) = F \cap G$ $\Rightarrow (F,G) \subset (x,y)$ y

$$\dim_k \left(k[x,y]/(F,G) \right) = m$$

Podemos elegir para un $Y \subset X$ la estructura reducida:

(1) Si $\mathfrak{a} \subset A$ $\Rightarrow$ tomar $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset A$ y $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ con estructura $A \twoheadrightarrow A/\sqrt{\mathfrak{a}}$.

(2) Si X esquema e Y cerrado $\Rightarrow X = \bigcup \mathcal{U}_i$ afín $Y_i = Y \cap \mathcal{U}_i$. Darle estructura reducida
$\Rightarrow$ en $Y_i \cap Y_j$ les estructuras son isomorfas y compatibles en $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ (ayudantía pegado haces)

AHORA VAMOS A LA PELIGROSA ...

$\boxed{\text{Def}}$.- X esquema. Su dimensión es $\dim(X)$ como espacio topológico. Si $Z \subset X$ irred. cerrado $\Rightarrow$ codim Z es el supremo n

$$Z = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_n$$

con Z_i irred. cerrados en X. Para un cerrado $Y \subset X$ cualquiera,

$$\operatorname{codim} Y = \inf_{\substack{Z \subseteq Y \\ \text{irred.}}} \operatorname{codim} Z$$

Ej.- $X = \operatorname{spec} A \Rightarrow \dim X = \dim \mathrm{Krull}(A)$.
Si X afín integral tipo finito k y $Y \subseteq X$ cerrado irreducible

$\Rightarrow \quad \dim Y + \operatorname{codim} Y = \dim X \quad$ (Ex 3.20)

Pero en general, incluso para X Noetheriano, esto podría no ser cierto.

[Ej: Si $R = k[t]_{(t)}$ DVR con $k \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m} = k$

Integral

$X = \operatorname{Spec}(R[x])$. $\dim(R[x]) = 2$

$R[x]_t = \mathcal{O}(D(t))$ $\qquad (0) \subset (t) \subset (x, t)$ max cadena

$\quad \| $

$k(t)[x]$ $\qquad \Rightarrow \dim \operatorname{Spec}(R[x]_t) = 1$

$\therefore \exists\, D(t) \subset X$ abierto, $\dim D(t) \neq \dim X$.

$(xt-1) \subset R[x]$ es maximal $\quad k[t]_{(t)}[x] / (xt-1) \simeq k(t)$

$\dim R[x]_{(xt-1)} = 1$ $\qquad (0) \subset (xt-1) \subset (x-\alpha, t-\beta)$

$\beta \neq 0 \therefore t-\beta$ unidad

$\therefore \dim X \neq \dim \mathcal{O}_{(xt-1)}$

maximal

, etc...]

$\boxed{\text{Def}}$.- X esquema se dice <u>Normal</u> si todos sus anillos locales $\mathcal{O}_p$ son dominios integralmente cerrados. Sea X un esquema integral

$\Rightarrow \mathcal{U} = \operatorname{Spec}(A) \subset X$, $\tilde{A} :=$ clausura integral en $K(A)$

$\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{U}} = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$. Los $\tilde{\mathcal{U}}$ se pegan para formar $\tilde{X}$ esquema integral normal llamado <u>Normalización</u> de X. (Ex. 3.8)

muestra que $\exists$ $\tilde{X} \to X$ morfismo con la prop. universal: $\forall$ Z esquema normal integral y todo $Z \xrightarrow{f} X$ dominante [ie $f(Z)$ denso en X] $\exists!$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] & X \\ & Z \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[ul, phantom, shift left=3, "\square"] \end{tikzcd}$$

[Ej] $\mathbb{P}^1_k \longrightarrow$ curva plana parametrizable X

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_k \arrow[r] \arrow[dr, "\exists!"'] & X \\ & \tilde{X} \arrow[u] \arrow[ul, phantom, shift right=3, "\square"] \end{tikzcd}$$

$\tilde{X}$ normalización, ie, nosingular

Luego $g(\tilde{X}) = 0$ R-H y R-R dice $\tilde{X} \simeq \mathbb{P}^1_k$.

Normalizar en superficies <u>no</u> es desingularizar.]

Def.- Sea S un esquema, y sean X e Y esquemas sobre S. En cualquier categoría, el <u>producto fibrado</u> de X e Y sobre S es un objeto

$$X \times_S Y$$

con morfismos

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr] & \square & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

el cual satisface la propiedad universal: Dado esquema Z sobre S y morfismos $f: Z \to X$ y $g: Z \to Y$, existe único $\theta: Z \to X \times_S Y$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\exists!\,\theta"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "g"] & X\times_S Y \arrow[d, "p_1"'] \arrow[rr, "p_2"] & & Y \arrow[dl] \\
& X \arrow[r] & S &
\end{tikzcd}$$

Si no hay S involucrado, tomar $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

<u>Teorema</u>: $X \times_S Y$ existe.

<u>Dem</u>: Es pegar lo siguiente.
Digamos $X = \mathrm{Spec}\,A$, $Y = \mathrm{Spec}\,B$, $S = \mathrm{Spec}\,R$.
$\therefore$ $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ funciona como producto.

Dar $Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \iff$ Dar $A \otimes_R B \longrightarrow \underbrace{\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)}_{C}$ (Ex. 2.4)

Pero dar $A \otimes_R B \longrightarrow C$ (bajo R) $\iff$ dar $A \longrightarrow C$ (bajo R) y $B \longrightarrow C$ (bajo R)

[Primero un R-módulo bajo los $R \to A$, $R \to B$
Luego álgebra: $(a_1 \otimes b_1)\cdot(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$ Y propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
& & A\otimes_R B \arrow[dll, "\exists!"'] & \\
C & A \arrow[l] \arrow[ur, "a\otimes 1"] & & B \arrow[ul, "1\otimes b"'] \arrow[lll, bend left=40] \\
& & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[ull] &
\end{tikzcd}$$
]

Recomiendo "Geometry of schemes" aquí   Seguir Hartshorne ■

Se pueden mostrar:

(a) $R \otimes_R S = S$.

(b) $I \subset S$ ideal, $R \to S$, $R \to T$

$$\Rightarrow \quad S/I \otimes_R T = S \otimes_R T \big/ (I \otimes 1)(S \otimes_R T)$$

(c) $R[x_1, \dots, x_n] \otimes_R R[y_1, \dots, y_m] = R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$

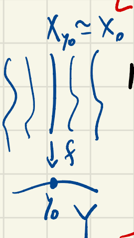
Finalmente un uso práctico del producto.

$\boxed{\text{Def}}$.- $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo entre esquemas, $y \in Y$, $k(y)$ su cuerpo residual, $\mathrm{Spec}(k(y)) \longrightarrow Y$ el morfismo natural. Se define la <u>FIBRA</u> de f sobre y como el esquema

$$X_y := \mathrm{Spec}(k(y)) \times_Y X .$$

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(k(y)) \arrow[r] & Y \ni y \end{tikzcd}$$

[Ex 3.10 : el espacio topológico $f^{-1}(y)$ es isomorfo a X_y]



Noción de familia de deformaciones de un $X_0 \to k$: $X \xrightarrow{f} Y$ = conexo, $y_0 \in Y$, $k(y_0) = k$, $X_{y_0} \simeq X_0$. Los X_y de f se llaman deformaciones de X_0.

<u>Ej 1</u>: $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, fibra sobre punto genérico es $X_{\mathbb{Q}}$, sobre puntos cerrados X_p la cual se llama <u>reducción de X modulo p</u>.

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \\ \cup \\ (x^p + y^p + z^p = 0) \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

<u>Ej 2</u>: Cambio de base: Dado $X \to S$, uno cambia de base S' al tener $S' \to S$ y considerar $X \times_S S'$ sobre S'.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ y $S' = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \Rightarrow X_{\mathbb{R}}$ a $X_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_{\mathbb{R}} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

cambio base

- $S = \mathbb{P}^1$ y así $X \to \mathbb{P}^1$ una fibración. Luego cambiamos curva base $S' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ finito y tenemos nueva fibración.

• $X \to S$ tipo finito y $S' \to S$ arbitrario $\Rightarrow X' \to S'$ tipo finito

Así: tipo finito es <u>estable</u> bajo cambio de base.

Integral no lo es! mirar fibras.

$xy - t$

<u>Ej 4</u>.

<u>Ej 3</u>: $k = \bar{k}$ y $X = \operatorname{Spec}\left(k[x,y,t]/(ty-x^2)\right)$

$X \xrightarrow{f} Y$

$Y = \operatorname{Spec} k[t]$ y $k[t] \hookrightarrow k[x,y,t]/(ty-x^2)$.

deformación dep. de "t"

$$\begin{array}{c} X_\eta \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec}(k(t)) \end{array}$$

...