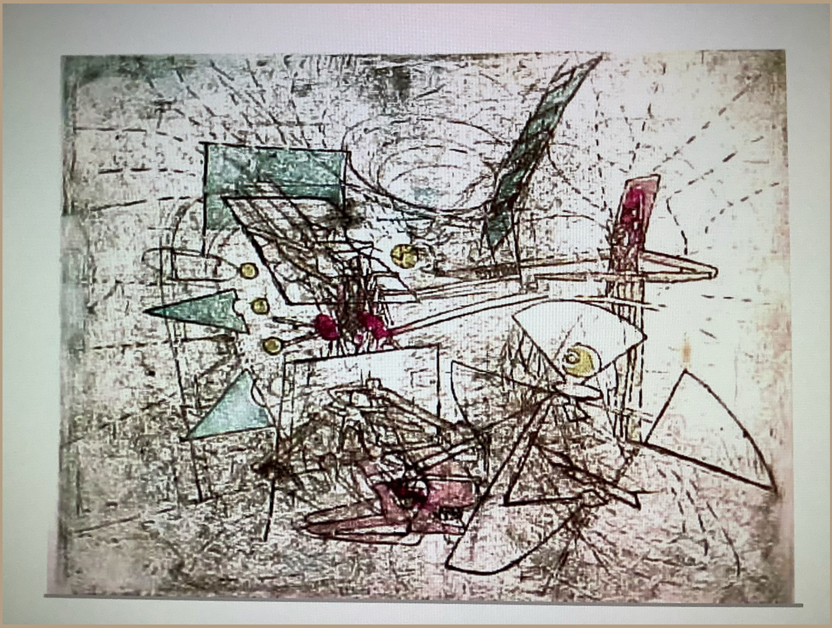


geo13

28/Sept/21

Separable, propio, proyectivo, Variedad de nuevo ...

§4. Morfismos separables y propios.

Tener en mente: Separable $\longleftrightarrow$ Hausdorff

Propio $\longleftrightarrow$ pre-imagen de compacto es compacto

Si $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ esquema sobre $\mathbb{C}$ de tipo finito $\Rightarrow$ se induce topología y con eso obtenemos Hausdorff y compacto. [Mirar $\boxed{\text{GAGA}}$]

J.-P. Serre ← $\boxed{\text{F.A.C.}}$ haces y cohom.

alg. vs an.

$\boxed{\text{TOHOKU Groth.}}$

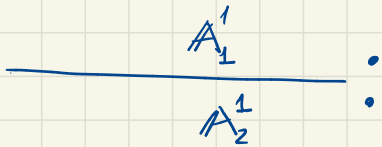
$\boxed{\text{Def}}$.- $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo de esquemas. El morfismo diagonal $\Delta: X \to X \times_Y X$ es el único morfismo inducido por la identidad:

$$\begin{tikzcd} & & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[urr, "\Delta"] \arrow[r, "1\!\!1_X"'] \arrow[rrrr, bend left=40, "1\!\!1_X"] & X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & & Y & \end{tikzcd}$$

f es separable sobre Y si Δ es inmersión cerrada.

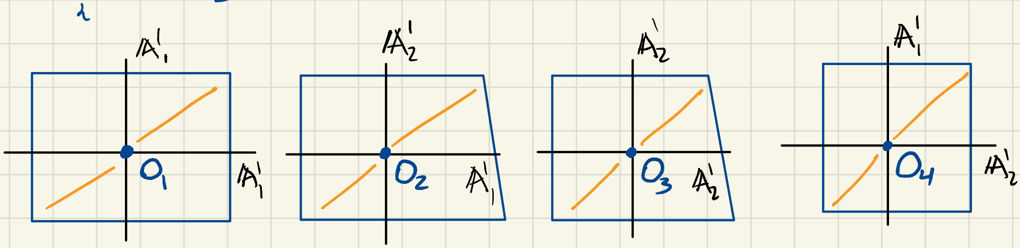
f es separable si lo es sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Ej.- k = cuerpo, X =  : recta afín con 2 orígenes $\Rightarrow$ X no es separable sobre k.

Si X = 

, entonces

$X \times_k X$ es



Lo cual dobla ejes y tenemos 4 orígenes.

Al mirar

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "1"'] \arrow[rrrd, bend left, "1"] & & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
& & \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

entonces los orígenes que toma Δ son O_1 y O_3, y la diagonal fuera de eso.

Pero su clausura agrega O_2 y O_4 $\Rightarrow$ No cerrado.

[Shaf.2 p.46]: $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ afines y
(1) $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ afín $\forall \alpha, \beta$
(2) $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ generado por secciones de $\mathcal{U}_\alpha$ y $\mathcal{U}_\beta$ $\forall \alpha, \beta$

$\Rightarrow$ $X \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ separable sobre $\operatorname{Spec} B$, cualquier B.

Prop: $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo entre esquemas afines $\Rightarrow$ f es separable.

dem:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes_B A \arrow[rr, "\Delta"] & & A \\
A \arrow[ur] \arrow[urrr, bend left, "1"] & & A \arrow[ul] \arrow[ur, "1"'] & \\
& B \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\Delta(a \otimes a') = aa'$
y extender
lo cual es sobre ■

[$A \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} B$ cualquiera
$\Rightarrow$ $A/\ker\varphi \simeq B$ $\operatorname{Spec}(A/\ker\varphi) \simeq \operatorname{Spec} B$]

Cor: $X \xrightarrow{f} Y$ separable $\iff$ Imagen de Δ es cerrado en $X \times_Y X$.

dem: $\Rightarrow)$ ✓ $\Leftarrow)$ Necesitamos $\Delta : X \to X \times_Y X$ inmersión cerrada.

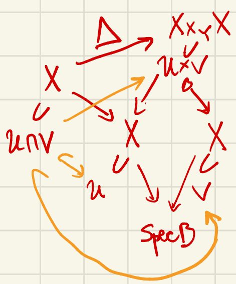
(1) $X \times_Y X \xrightarrow{p_1} X$ con $p_1 \circ \Delta = 1\!\!1_X \Rightarrow \Delta$ es un homeomorfismo sobre $\Delta(X)$, ie Δ es biyección en su imagen y $p_1^{-1}(\mathcal{U}) \cap \Delta(X) = \Delta(\mathcal{U})$ abierto para $\mathcal{U} \subset X$ abierto.

(2) $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ sobre. $p \in X$, $\mathcal{U}$ afín $\ni p$ tal que $f(\mathcal{U}) \subseteq V$ afín en Y $\Rightarrow \mathcal{U} \times_V \mathcal{U}$ es abierto afín de $\Delta(p)$ y por prop. es inmersión cerrada ■

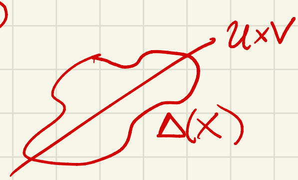
obs: Se puede demostrar que todo subesquema cerrado de un $\operatorname{Spec} A$ es afín, de hecho viene de un $\mathfrak{a} \subset A$ ideal [3.11 exercise].

Teo: $X \to \operatorname{Spec} B$ separable $\Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ es afín si $\mathcal{U}, V$ afín.

dem: $\mathcal{U} \cap V = \Delta^{-1}(\underbrace{\mathcal{U} \times_B V}_{\text{afín}})$



Como $\Delta(X)$ cerrado



$\Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ es un cerrado en un afín y así afín ■

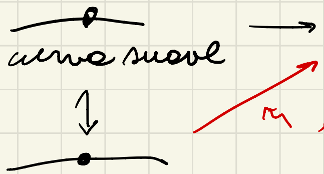
Luego viene el criterio de separabilidad que más menos dice que dado

$$\begin{tikzcd} U = \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T = \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

anillo Val.

existe a lo más [Thm 4.3]

$R \subset K$



$X \supset \cdot \; \vdots$ ← es lo que no queremos.

existe a lo más una manera de completar. [Thm 4.3 Hartshorne]

Def. $X \xrightarrow{f} Y$ se dice morfismo propio si es separable, de tipo finito y universalmente cerrado.

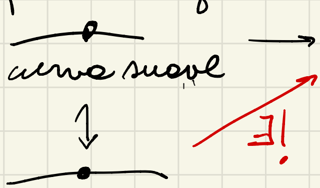
[Un morfismo es cerrado si envía cerrados en cerrados. Universalmente cerrado si lo es para cualquier cambio de base.]

Ejl. k cuerpo, $X = \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$. Luego separable y tipo finito, pero no es propio:

$$\begin{tikzcd} \{xy=1\} \subset \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d] \\ \underbrace{\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}}_{\text{no es cerrado}} \subset \mathbb{A}^1_k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, k \end{tikzcd}$$

cerrado

Luego viene un criterio para morfismos propios que dice: Sh tipo finito y



$\Leftrightarrow$ propio (Thm 4.7)

Cor : Tomar todo esquema Noetheriano. Luego :

	SEPARABLE	PROPIO
a.	inmersiones abiertas y cerradas	cerradas
b.	composición	composición
c.	estable bajo cambio de base	también
d.	$X \xrightarrow{f} Y$ $X' \xrightarrow{f'} Y'$ sep$\vert_S$ $\Rightarrow X \times X' \xrightarrow{f \times f'} Y \times Y'$ sep$\vert_S$	también
e.	$X \xrightarrow{f} Y \to Z$, $X \to Z$ sep. $\Rightarrow f$ sep.	$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{sep}} Z$, $X \to Z$ propio $\Rightarrow f$ propio

f. $X \to Y$ sep. (propio) $\iff Y = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ af. y $f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha$ sep. (propio)

Lo último será definir morfismos proyectivos e informar sobre variedades abstractas ...

obs): Ya definimos $\mathbb{P}^n_A := \mathrm{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$. Notar que como $A \to B \Rightarrow A[x_1, \dots, x_n] \otimes_A B \simeq B[x_1, \dots, x_n]$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n_B \simeq \mathbb{P}^n_A \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B).$$

$\boxed{\text{Def}}$.- Y = esquema. Se define el <u>n-espacio proyectivo</u> sobre Y como $\mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} Y$.

Un morfismo $f : X \to Y$ es <u>proyectivo</u> si factoriza como :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{inm. cerrada}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl, "P_Y\ (\text{proyección})"] \\ Y & \end{tikzcd} \quad \forall n .$$

Un morfismo es <u>cuasi-proyectivo</u> si factoriza como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{inm. abierta}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "\square"] & X' \arrow[r, "\text{proy}"] & Y \end{tikzcd} .$$

Ejl: S anillo graduado con $S_0 = A$ el cual es f.g. como A-álgebra por S_1.

$\Rightarrow$ $\text{Proy}(S) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ es proyectivo.

Por hipótesis $\exists\ S' = A[x_0, .., x_n] \twoheadrightarrow S$ entre anillos graduados

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads] & S \\ & A \arrow[ul, hook] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \text{Proj}(S) \arrow[r, hook, "\text{inm. cerrada}"] \arrow[dr] & \text{Proj}(S') = \mathbb{P}^n_A \arrow[d] \\ & \text{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

<u>Teorema</u>: Un morfismo proyectivo entre esquemas Noetherianos es Propio. Un morfismo cuasi-proyectivo entre esquemas Noetherianos es separable y de tipo finito.

<u>dem</u>: Aplicar propiedades para reducir a: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ es propio o separable y tipo finito. } Ver Hartshorne ■

<u>obs</u>: X, Y variedades proyectivas sobre k y $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo $\Rightarrow$ f es proyectivo (y así propio por lo anterior $\Rightarrow$ cerrado).

$$\left[\begin{array}{l} \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{inm cerr}", "i"'] \arrow[dr, "f"'] & X \times_k Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd} \quad i = 1\!\!1_X \times f \quad \text{y} \quad X \times_k Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k \times Y \simeq (\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k) \times_{\operatorname{Spec} k} Y \\ \hspace{24em} \wr\!\| \\ \hspace{22em} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \end{array}\right]$$

<u>obs</u>: Una var. proy. $|_k$ es una var. propia $|_k$.
Propia $|_k$ se llama <u>completa</u> en general.

<u>Prop 4.10</u>: $k = \bar{k}$. La imagen de

$$t : Var(k) \longrightarrow Sch(k)$$

es exactamente el conj. de esquemas cuasi-proyectivos integrales sobre k; la imagen de las var. proy. son los esquemas proyectivos integrales.

$\boxed{\text{Def}}$.- Una <u>variedad abstracta</u> (usaremos variedad en este sentido) es un esquema separable integral de tipo finito sobre $k = \bar{k}$.

[Noción de variedad abstracta nace con Weil (1946) y su estudio de la variedad Jacobiana (que resultó ser proyectiva)]

dim 1 curva   dim 2 superficie   dim ≥ 3 n-fold
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n''$

Sabemos que :

(1) Toda curva completa es proyectiva (en Hartshorne)

(2) Toda superficie no singular completa es proyectiva [Zariski 1958].

(3) Existen superficies singulares completas no proyectivas [Nagata 1957] (ex. 7.13, III 5.9)

(4) Existen 3-folds nosingulares completos no proyectivos [Nagata 1960] [Hironaka] (ver Appendix B)

(5) Toda variedad $\subset$ variedad completa como abierto [Nagata 1962]