M R-módulo

$\mathcal{M}$ $\mathcal{O}_X$-módulo

ga14

28/Sept/21

$\mathcal{O}_X$-módulos

§5. Haces de Módulos

Def.- $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado. Un <u>haz de $\mathcal{O}_X$-módulos</u> es un haz $\mathcal{F}$ en X tal que:

(i) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es un $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo.
(ii) $\forall\, V \subseteq \mathcal{U}$ la restricción $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulos vía $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \to \mathcal{O}_X(V)$.

[i.e.
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \times \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$
]

Def.- Un <u>morfismo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos</u> es un morfismo de haces $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que para $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulos.

operaciones:
- kernel, cokernel, imagen (hacificados) de morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos son $\mathcal{O}_X$-módulos.
- Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulos $\Rightarrow$ $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.
- $\oplus$ es $\mathcal{O}_X$-módulo. Suc. exacta $\mathcal{O}_X$-mod si es exacta como haces.

- Para $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-módulos,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{todos los morfismos como } \mathcal{O}_X\text{-módulos}$$
(es un grupo)

Si $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto $\Rightarrow$ $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ es un $\mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}$-módulo y

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$$

es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos (Ex. 1.15) : $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

- El haz asociado a $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})} \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo : $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

[veremos que en $X = \mathbb{P}^1_k$ tenemos $\mathcal{F} = \mathcal{O}(1)$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}(-1)$ y $\mathcal{O}(1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(-1) \simeq \mathcal{O}_X$ y $\mathcal{F}(X) \otimes_k \mathcal{G}(X) = 0 \neq \mathcal{O}_X(X) = k$]

$\boxed{\text{Def}}$.- Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es <u>libre</u> si $\mathcal{F} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_X$.
Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es <u>localmente libre</u> si existe $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ abiertos tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i}$ es $\mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}_i}$-mod libre.

El <u>rango de $\mathcal{F}$</u> en $\mathcal{U}_i$ es el # copias de $\mathcal{O}_X$. Si X es conexo $\Rightarrow$ el rango de $\mathcal{F}$ es constante.

[Se reduce a mostrar que R anillo, $R^n \simeq R^m$ como R-mod $\Leftrightarrow n = m$]

- Un <u>haz de ideales</u> en X es un haz de $\mathcal{O}_X$-modulos $\mathcal{I}$ el cual es subhaz de $\mathcal{O}_X$, ie, $\forall \mathcal{U}$, $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ ideal de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$.

- Sean $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo de espacios anillados y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo

$\Rightarrow$ $\underbrace{f_* \mathcal{F} \text{ es un } \mathcal{O}_Y\text{-módulo}}_{\text{Imagen directa de } \mathcal{F}}$ a través de $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$.

[pushforward]

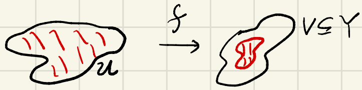
- Sea $(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{O}_Y)$ morfismo de espacios anillados y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo.

Se definió $f^{-1}\mathcal{G}$ como haz en X asociado a

$$\mathcal{U} \mapsto \varinjlim_{\substack{V\supseteq f(\mathcal{U}) \\ \text{directo}}} \mathcal{G}(V) \quad \text{(suerte de tallo en } f(\mathcal{U})\text{)}$$

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y(\mathcal{U}) = \Big\{ \mathcal{U} \mapsto \varinjlim_{\substack{V\supseteq f(\mathcal{U}) \\ \text{directo}}} \mathcal{O}_Y(V) \Big\}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$$

[



$$s = \langle V, g\rangle \longmapsto f^{\#}(g), \quad g\in\mathcal{O}_Y(V)$$

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$$
$$g \longmapsto f^{\#}(g)$$

]

y así $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Se define pullback de $\mathcal{G}$:

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

y así es un $\mathcal{O}_X$-modulo

Ej/ A nivel de anillos [Pensar informalmente $X = \operatorname{Spec} A \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} B$]

$B \longrightarrow A$ y M un A-módulo y N un B-modulo

$\Rightarrow$ M es B-módulo (pushforward) y $N\otimes_B A$ es un A-módulo (pullback). Ya viene!

Fact: $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$.

Ahora recién con esquemas ...

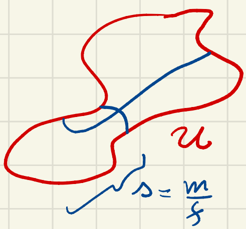
$\boxed{\text{Def}}$.- M A-módulo. Definiremos un haz $\tilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos donde $X = \mathrm{Spec}(A)$:

(1) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $M_\mathfrak{p}$ es la localización en $\mathfrak{p}$

[S mult. cerrado con 1, $S^{-1}A$. Luego en $M \times S$ definir las oper. para $\frac{m}{s}$ y $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \iff \exists\, t \in S,\ t(sm' - s'm) = 0$ en M
$\therefore$ $S^{-1}M$ es $S^{-1}A$-módulo] AT-Mac p. 38-41

(2) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ abierto,

$$\tilde{M}(\mathcal{U}) := \left\{ \begin{array}{l} s : \mathcal{U} \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} M_\mathfrak{p} \text{ tal que} \\ (1)\ s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p} \\ (2) \text{ Para cada } \mathfrak{p} \in \mathcal{U}, \text{ existe } \mathfrak{p} \in V \subset \mathcal{U} \text{ abierto} \\ \quad \text{y } m \in M,\ f \in A \text{ tal que } \forall\, \mathfrak{q} \in V \text{ tenemos} \\ \quad\quad f \notin \mathfrak{q} \text{ y } s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \end{array} \right\}$$



Prop : (a) $\tilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo donde $X = \mathrm{Spec}(A)$.
(b) $\forall\, \mathfrak{p} \in X$, $(\tilde{M})_\mathfrak{p} \simeq M_\mathfrak{p}$
(c) $\forall\, f \in A$, el A_f-módulo $\tilde{M}(D(f)) \simeq M_f$.
(d) $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$.

Dem : Reemplazar lo que se hizo con $\mathcal{O}_X$ en caso afín, misma demostración •

Prop : $A \to B$ homomorfismo entre anillos, $(f, f^\#)$ entre Specs.

(a) $M \mapsto \tilde{M}$ es functor exacto, fully faithfull entre Cat. de A-módulos y Cat. de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulos.

[Es functor, exacto se mide localizando en módulos y se traduce a tallos y así ok.
Usando ~ tenemos $\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$ y con Γ tenemos para el otro lado.]

(b) M, N A-módulos $\Rightarrow (M \otimes_A N)^\sim \simeq \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$.

(c) M_i A-módulos $\Rightarrow (\oplus M_i)^\sim \simeq \oplus \tilde{M}_i$.

[$\oplus$ y $\otimes$ conmuta con localizar
AtMac §3]

(d) N B-módulo $\Rightarrow f_*(\tilde{N}) \simeq ({}_A N)^\sim$, ${}_A N$ es N como A-mod.

(e) M A-módulo $\Rightarrow f^*(\tilde{M}) \simeq (M \otimes_A B)^\sim$.

Ahora vamos por haces de $\mathcal{O}_X$-módulos en esquemas X tales que localmente sean como arriba, y también una "condición de finitud".

$\boxed{\text{Def}}$.- $(X, \mathcal{O}_X)$ esquema. Un haz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos es <u>cuasi-coherente</u> si $X = \bigcup \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ tal que $\exists M_i$ A_i-módulo con

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} \simeq \tilde{M}_i .$$

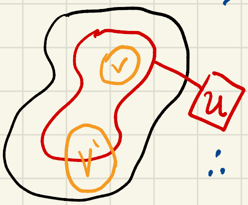
Decimos que es <u>coherente</u> si además cada M_i es un A_i-módulo finitamente generado.

Ej.- $\mathcal{O}_X$ en $(X,\mathcal{O}_X)$ es un haz coherente.

Ej.- Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y \overset{i}{\subseteq} X$ subesquema cerrado definido por $\mathfrak{a} \subset A$ ideal $\Rightarrow$ $i_*\mathcal{O}_Y$ es coherente $\mathcal{O}_X$-módulo $\left(\simeq (A/\mathfrak{a})^{\sim}\right)$.

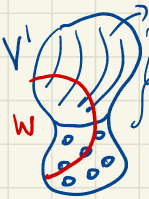
Ej.- $\mathcal{U} \overset{j}{\subseteq} X$ abierto en un esquema

$\Rightarrow$ $j_!(\mathcal{O}_\mathcal{U})$ = extender por cero fuera de $\mathcal{U}$



$\left(\text{hacificación de } \begin{array}{ll} V \mapsto \mathcal{O}(V) & \text{si } V \subset \mathcal{U} \\ V \mapsto 0 & \text{sino} \end{array}\right)$ [Pensar nivel tallo]

$\therefore$ Tenemos un $\mathcal{O}_X$-módulo, pero en general no cuasi-coherente



$D(f)$s abierto

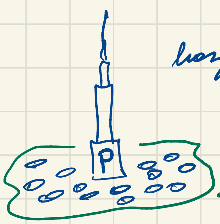
X irred, $V' = \mathrm{Spec}(A) \not\subset \mathcal{U} \subset X$ $\Rightarrow$ $j_!(\mathcal{O}_\mathcal{U})|_{V'}$ no tiene secciones globales sobre V' pero no es el haz $\equiv 0$.

mirar los tallos!

$f \in j_!(\mathcal{O}_\mathcal{U})|_{V'}(V')$ $\Rightarrow$ en W es cero.

irreducible

[haz rascacielos sí es coherente!



p cerrado, $i_p(k(p))$: $\mathcal{U} \mapsto \begin{cases} k(p) & p \in \mathcal{U} \\ 0 & p \notin \mathcal{U} \end{cases}$] $\vee$ $k(p)$-esp. vect

$i_p(k(p))(\mathrm{Spec}\,A) = k(p)$ $\quad$ $A \twoheadrightarrow k(p)$

Ej.- Ej 3.6, X = esquema integral, $\mathcal{O}_{X,\eta}$ es un cuerpo, donde η es el punto genérico

$\mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ $\left[(0) \in \underset{\simeq \mathcal{U}}{\mathrm{Spec}(A)} \subseteq X \quad \forall \mathcal{U} \text{ afín} \right]$ $\mathcal{O}_{X,\eta} =: K(X)$

$\mathcal{O}_X(\mathrm{Spec} A) \simeq A$

$\| $

$\mathcal{O}_X|_{\mathrm{Spec} A}(\mathrm{Spec} A)$

es el cuerpo de funciones y así $K(X) \simeq K(A)$.

Tomar el haz constante $K(X)$, denotado por $\mathcal{K}$. Luego si es cuasi-coherente pero en general no es coherente, a menos que $X = \mathrm{pto}$.

$k(x)$ f.g. como $k[x]$-mod

Tendremos una obsesión por $\Gamma(X, \mathcal{F})$ para un $\mathcal{F}$ coherente, donde podríamos lograr un espacio vectorial con dim finita ...

Lema 5.3: $X = \mathrm{Spec} A$, $f \in A$, $D(f) \subseteq X$, $\mathcal{F}$ cuasi-coherente en X.

(a) Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es tal que $s = 0$ en $\mathcal{F}(D(f))$
$\Rightarrow \exists\, n > 0$ tal que $f^n \cdot s = 0$.

(b) Dado $t \in \mathcal{F}(D(f)) \Rightarrow \exists\, n > 0$ tal que $f^n \cdot t \in \mathcal{F}(X)$.

Dem: Mirar juegos locales en Hartshorne.

Prop 5.4: X esquema.

$\mathcal{F}$ cuasi-coherente $\Leftrightarrow$ $\forall \mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A) \subset X$, $\exists M$ A-modulo con $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \simeq \tilde{M}$.

Si X es Noetheriano,

$\mathcal{F}$ coherente $\Leftrightarrow$ lo mismo y M A-módulo finitamente gen.

Dem. Reduce al caso afín y usa $\mathcal{F}(D(g_i)) \simeq M_{g_i}$ ∎
[Ver Hartshorne]

Cor: $X = \mathrm{Spec}(A)$ tenemos $M \mapsto \tilde{M}$ equivalencia de categorías A-módulos y cuasi-coherentes $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A}$-módulos.

Su inversa es $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. Si A es Noetheriano, entonces f.g. A-mod $\iff$ coherentes $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-Mód.

$$X = \mathbb{P}^1_k \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1_k \leftarrow Y$$

$n:1$ finito

$'' \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A})$

$\mathcal{F}$ haz l. libre rango finito

$$f^*\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)\right) = \bigoplus_{i=1}^n f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n a_i)$

$f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{A}$ $\mathcal{O}_Y$-alg.

$\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i)$

$\boxed{b_i}$