$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)$$

F.A.C.

ga 15

5-octubre-21

$\mathcal{O}_X$-modulos II

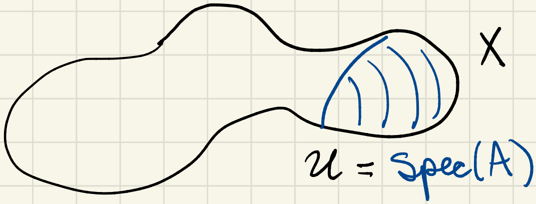
y final

Agenda:

- Oct-Nov liquidamos ch II y ch III.
- Tareas grupales
- Final Nov-Dic 1 semana de curvas. (Ignacio Barros)

... Vimos haces de modulos para $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado y

vimos haces de modulos cuasi-coherentes y coherentes para $(X, \mathcal{O}_X)$ esquema.



$\Rightarrow$ queremos $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \simeq \tilde{M}$

M A-módulo

Cuasi-coherente para $\mathrm{Spec}(A)$ resulta ser $\tilde{M}$.

Prop. 5.6: X = afín, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos con $\mathcal{F}'$ cuasi-coherente

$\Rightarrow$ $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$ exacta.

Dem: • Fácil se demuestra en general que $\Gamma(X, \_)$ es exacto por la izquierda.

• Como $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ sobre $\Rightarrow$ para $p \in X$, $\exists\, D(f) \ni p$ con $\mathcal{F}(D(f)) \twoheadrightarrow \mathcal{F}''(D(f))$.

• Usando que $\mathcal{F}'$ es cuasi-coherente (en el sentido lifting y pegar) se puede mostrar:

(*) Dado $s \in \mathcal{F}''(X)$, $\exists\, n > 0$ y $t \in \mathcal{F}(X)$ con $t \mapsto f^n s$, donde los f son como en

depende de p

- Asumir (*) y cubrir $X = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i)$ con

$$\mathcal{F}(D(f_i)) \twoheadrightarrow \mathcal{F}''(D(f_i))$$

$\Rightarrow \exists n$ y $t_i \in \mathcal{F}(X)$ tal que $t_i \mapsto f_i^n s$ — s fijo $\in \mathcal{F}(X)$

- Como $\{D(f_i)\}_{i=1}^{r}$ cubren X y así el ideal $\mathfrak{a} = (f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r})$ es A. $X = \bigcup D(f_i^{n_i})$, $\emptyset = \bigcap V(f_i^{n_i}) = V(f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r})$

$\Rightarrow \quad 1 = a_1 f_1^{n_1} + \dots + a_r f_r^{n_r}$

- Sea $t = \sum_{i=1}^{r} a_i t_i \in \mathcal{F}(X)$

$$\Rightarrow \underset{\mathcal{F}(X)}{t} \mapsto \sum_{i=1}^{r} \underset{A}{a_i} (\underset{A}{f_i^{n_i}} \underset{\mathcal{F}''(X)}{s}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} a_i f_i^{n}\right)}_{A} s = s \quad \blacksquare$$

obs! La prop. anterior será consecuencia de la cohomología:

$$\mathcal{F}' \text{ cuasi-coh en afín} \Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}') = 0.$$

$$\left[0 \to \underset{H^0}{\Gamma(\mathcal{F}')} \to \underset{H^0}{\Gamma(\mathcal{F})} \to \Gamma(\mathcal{F}'') \to \underbrace{H^1(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{F}')}_{=0} \cdots \right]$$

Lista de proposiciones de utilidad pública:

Prop 5.7: Sea X un esquema.

(1) $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}'$ entre cuasi-coherentes $\Rightarrow$ $\ker\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{coker}\varphi$ es cuasi-coherente

[$X = \operatorname{Spec} A$ y aplicar que $M \mapsto \widetilde{M}$ es exacto, fully faithfull]

(2) $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ cuasi-coherente

cuasi-coherentes

Si X Noetheriano $\Rightarrow$ lo mismo con coherente.

<u>Prop 5.8</u>: $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo de esquemas.

(a) $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_Y$-mod cuasi-coherente $\Rightarrow$ $f^*\mathcal{G}$ lo es.

(b) X e Y Noetherianos, $\mathcal{G}$ coh $\Rightarrow$ $f^*\mathcal{G}$ coh.

(c) Asumir X Noetheriano o f cuasi-compacto y separable. Entonces,

$\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-mod cuasi-coh $\Rightarrow$ $f_*\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_Y$-mod cuasi-coh.

<u>obs</u>.- Si X e Y Noeth $\not\Rightarrow$ f_* coh $=$ coh.
Si es cierto si f es propio. $\left[\begin{array}{c} \operatorname{Spec} A \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k \\ f_*\mathcal{O}_X = A \end{array}\right]$

Aplicación: Haz de ideales de un subesquema cerrado.

$\boxed{\text{Def}}$.- $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subesquema cerrado de X.

El haz de ideales de Y es $\mathcal{I}_Y := \ker(i^\#)$

donde $i^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$.

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0$$

(una de las sucesiones exactas más usadas)

<u>Prop</u>: X esquema.

$Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subesq. cerrado $\Rightarrow \mathcal{I}_Y$ cuasi-coherente.

$+$ X Noetheriano $\Rightarrow \mathcal{I}_Y$ coherente.

Si $\mathcal{I}$ es un cuasi-coh haz de ideales $\Rightarrow \exists!\ Y \overset{i}{\subset} X$, $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_Y$.

<u>Cor</u>: $X = \operatorname{Spec}(A)$, entonces

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{a} \subset A \\ \text{ideales} \end{matrix} \right\} \overset{1-1}{\equiv} \left\{ \begin{matrix} Y \overset{i}{\subset} X \\ \text{subesq. cerrado} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{a} \longmapsto \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to X$$

(así todo subesq. cerrado de afín es afín)

¿Qué onda con el Proj?

$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ anillo graduado

M S-módulo graduado: $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$, $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$

Dado $\ell \in \mathbb{Z}$, $M(\ell) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M(\ell)_d$, $M(\ell)_d = M_{d+\ell}$

$\boxed{\text{Def}}$:- Dado M S-módulo graduado, se define $\tilde{M}$ en $\text{Proj}(S)$:

- Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$,

$$M_{(\mathfrak{p})} = \text{elementos de grado cero en } T^{-1}M$$

donde $T = \{$ elementos homogeneos no en $\mathfrak{p}\}$

- Para $\mathcal{U} \subseteq \text{Proj}(S)$ abierto, definir

$$\tilde{M}(\mathcal{U}) := \left\{ \begin{array}{l} s : \mathcal{U} \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} M_{(\mathfrak{p})} \quad \text{con } s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})} \text{ y} \\ \text{si } \mathfrak{p} \in \mathcal{U} \ \exists \ (\mathfrak{p} \in V) \subset \mathcal{U} \text{ y } m \in M \text{ y } f \in S \\ \text{del mismo grado tal que } \forall \mathfrak{q} \in V, f \notin \mathfrak{q} \\ \text{y} \qquad s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_{(\mathfrak{q})} \end{array} \right\}$$

$\therefore$

- $\forall \mathfrak{p} \in X = \text{Proj}(S)$, $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$.
- $\forall f \in S_+$ homogeneo, $\tilde{M}|_{D_+(f)} \simeq (M_{(f)})^{\sim}$ vía $D_+(f) \simeq \text{Spec}\, S_{(f)}$.

$\bigoplus_{d \geq 1} S_d$

- $\tilde{M}$ es cuasi-coherente. Si S Noetheriano y M f. g. $\Rightarrow \tilde{M}$ es coherente.

$\boxed{\text{Def}}$: S graduado, $X = \text{Proj}(S)$. Dado $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{O}_X(n) := (S(n))^{\sim}$$

El $\mathcal{O}_X(1)$ se llama haz torcido de Serre.

Dado $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulo, $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

Ej: $S = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, ie, $\mathbb{P}^n_k$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \quad \cdots \\ S(1) & = & k & \oplus & kx_0 + \dots + kx_n & \oplus & kx_0^2 + \dots & \oplus & \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow S(1)_{(x_i)} = S_{(x_i)} x_0 + \dots + S_{(x_i)} x_n \qquad \widetilde{(S(1))}\big|_{D(x_i)}$$

¡ya que grado de arriba está aumentado en 1

$\mathcal{O}_X(D(x_i))$

$$\text{pero} \quad \frac{x_j}{x_i} \cdot x_i = x_j \Rightarrow S(1)_{(x_i)} = S_{(x_i)} x_i$$

y así es localmente libre rango 1.

Lo mismo para $\mathcal{O}_X(n)$.

Por otro lado, las secciones globales son aquellas de grado cero que funcionen como fracción en cada $D_+(x_i)$:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong S_n .$$

$\mathcal{L}', \mathcal{L}^{-1}$

$\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-1)$

$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}$

$\mathcal{L}$ loc. libre rango 1

$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ loc. l. rango 1 salvo isom. $\rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X)$

$$\begin{array}{cccc} S(-1) & 0 & 1 & 2 \\ & & k & kx_0 + \dots \end{array}$$

$$S(-1)_{(x_i)} = \underbrace{S_{(x_i)}}_{\mathcal{O}} \frac{1}{x_i}$$

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-n)) = 0$, $n > 0$

Prop: S = graduado, $X = \mathrm{Proy}(S)$. Asumir que S está generado por S_1 como S_0-álgebra.

(a) $\mathcal{O}_X(n)$ es un haz invertible en X (inv = loc. libre rango 1)

[Se usa S generado por S_1 para hacer el truco arriba con los $f \in S_1$ que generan S y así $\bigcup_{f \in S_1} D_+(f) = X$]

(b) $\forall M$ S-mód grad, $\tilde{M}(n) \simeq (M(n))^{\sim}$. En particular $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$.

[De nuevo se usa generación S_1]

(c) Sea T otro anillo graduado generado por T_1 como T_0-álgebra. Sea $\varphi: S \to T$ homomorfismo de anillos graduados y $\mathcal{U} \subseteq Y = \mathrm{Proy}(T)$ tal que

$\varphi(S_d) = T_m$

preservando grados!

$$f: \mathcal{U} \to X$$

es morfismo corresp. a φ. $\boxed{(\text{Ex. } 2.14)}$

$Y = \mathbb{P}^2 \to X = \mathbb{P}^2$

$[x,y,z] \mapsto [x^2, y^2, z^2]$

$$\Rightarrow f^*(\mathcal{O}_X(n)) \simeq \mathcal{O}_Y(n)|_{\mathcal{U}} \text{ y } f_*(\mathcal{O}_Y(n)|_{\mathcal{U}}) \simeq (f_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}})(n).$$

$Y = \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 = X$

$\mathcal{U} \xrightarrow{f} [xy, yz, xz]$ ($= u, v, w$)

$k[u,v,w] \xrightarrow{\varphi} k[x,y,z]$

$u \mapsto xy$

$v \mapsto yz$

$w \mapsto xz$

¿Cómo recuperar $\mathcal{F}$ cuasi-coherente en un $\mathrm{Proy}(S)$?

Si $X = \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow M = \Gamma(X, \mathcal{F})$

Pero $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_X) = k$!

$\boxed{\text{Def}}$.- $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-mod en $X = \operatorname{Proj}(S)$.

Definir $\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ S-módulo graduado.

[$s \in S_d \Rightarrow s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Si $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$
$\Rightarrow st \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$ definido en $\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) \simeq \mathcal{F}(n+d)$
por $t \otimes s$]

Prop: Si $S = A[x_0, \dots, x_n]$ $(n \geq 1)$, $X = \operatorname{Proj}(S) = \mathbb{P}^n_A$

$\Rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$. (Ex 5.14 Proy normal)

[Si S anillo graduado no polinomial
$\Rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ puede no ser S]

[Si $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ variedad proy con $\mathcal{I}_X$ = haz de ideales
y S = anillo coord. homo
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_X \to 0$

Si queremos $\Gamma(\mathcal{O}_X(m)) \simeq \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) / \Gamma(\mathcal{I}_X(m))$
$\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0 \ \forall m$, pero esto no es así siempre]

Prop: S f.g. por S_1 como S_0-álgebra
$X = \operatorname{Proj}(S)$, $\mathcal{F}$ cuasi-coherente

$\Rightarrow \Gamma_*(\mathcal{F})^\sim \xrightarrow[\exists\, \text{isom}]{} \mathcal{F}$.

Cor : Sea A un anillo.

(a) $Y \subset \mathbb{P}^n_A$ subesq. cerrado $\Rightarrow \exists\, I \subset S = A[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo tal que Y es el subesquema cerrado determinado por I.

(b) Y esquema proy sobre A

$\Leftrightarrow$ $Y \simeq \mathrm{Proy}(S)$, $S_0 = A$, S f.g. S_1-álgebra.

Def : Y = esquema

$\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times Y \xrightarrow{g} \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ haz torcido $\mathcal{O}(1)$ sobre Y es $g^*(\mathcal{O}(1))$.

[$Y = \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow$ es el anterior]

Def : $X \to Y$ entre esquemas, $\mathcal{L}$ haz invertible en X es MUY AMPLIO relativo a Y

si $\exists\ i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ inmersión para algún n [ie $\simeq$ con un abierto de un cerrado de $\mathbb{P}^n_Y$]

tal que $i^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{L}$.

Def : X = esquema, $\mathcal{F}$ haz de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se dice que $\mathcal{F}$ está generado por secciones globales si $\exists \{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ tal que para cada $x\in X$, las imágenes en $\mathcal{F}_x$ generan $\mathcal{F}_x$ como $\mathcal{O}_x$-módulo.

Dos Teoremas de Serre 1955 en F.A.C. :

Teo 5.7 : X = esquema proy sobre A-Noetheriano
$\mathcal{O}(1)$ haz invertible muy amplio en X

$\mathcal{F}$ haz coherente en X.

Entonces, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$ $\mathcal{F}(n)$ es generado por finitas secciones globales

$$\left[\therefore \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n) \to 0 \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_X(-n) \to \mathcal{F} \to 0 \right]$$

Teo 5.19 : k = cuerpo, A = f.g. k-álgebra,
X = esquema proy $|_A$
$\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulo coherente

$\Rightarrow$ $\Gamma(X,\mathcal{F})$ son f.g. A-módulos.