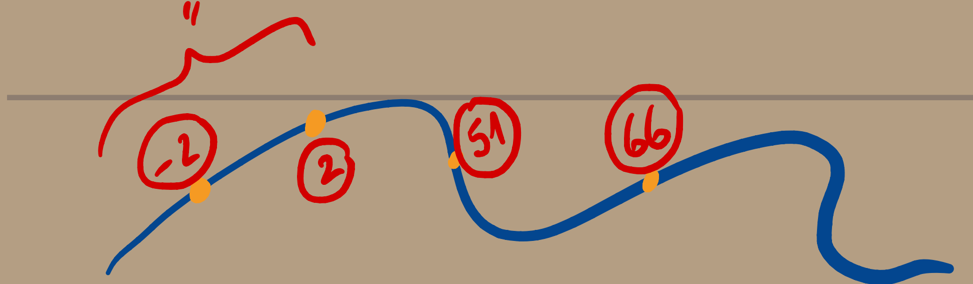
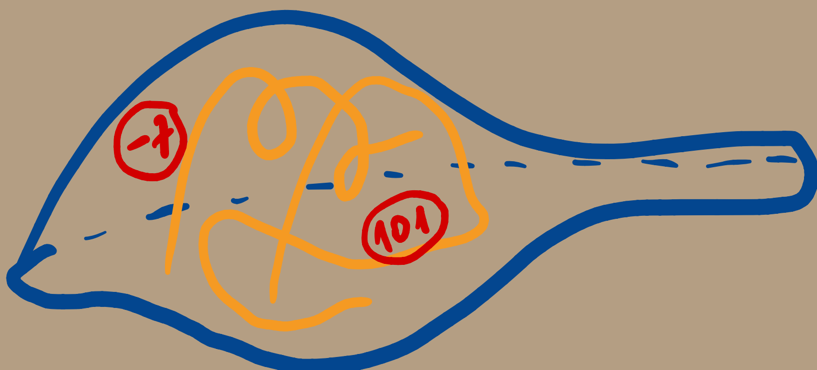
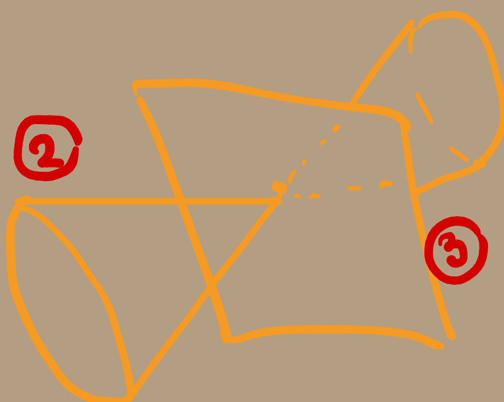
div(f)?







ga16

7/10/21

DIVISORES

12/10/21

§6. Divisores.

Entraremos en algo más geométrico :)

« Estudio de subesquemas de codim 1 en X salvo relación racional. »

$\boxed{\text{Def}}$.- X esquema es <u>regular en codim 1</u> (normal en codim 1) si todo $\mathcal{O}_{X,p}$ con $\dim \mathcal{O}_{X,p} = 1$ es regular.

- Recordar del AT-Mac : Si $A \supset \mathfrak{m}$ dominio local de dim 1, $A/\mathfrak{m} = k$
(p.94 prop. 9.2)

$A \subset K(A) \ni f = u \cdot t^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{Z}$

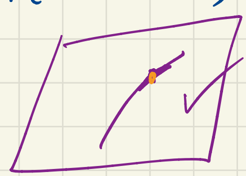
Entonces, A es DVR $\iff$ A es integralmente cerrado $\iff$ $\mathfrak{m}$ principal $\iff$ $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$

$f = u \cdot t^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{Z}$

$\mathfrak{m} = (t)$

- Recordar en general :
  - $A \supset \mathfrak{m}$ local es regular si $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$, $k = A/\mathfrak{m}$.

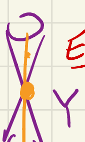
Ej.- $X = \mathbb{A}^2_k$, $\quad Y = \{ f(x,y) = 0 \} \subset \mathbb{A}^2_k$
(f irred)



$\Rightarrow k[x,y]_{(f)}$ tiene dim 1

$$(0) \subset (\bar{f}) \subseteq (\bar{x} - \alpha, \bar{y} - \beta) \subseteq A = k[x,y]_{(f)}$$

pero $\bar{x} - \alpha$ o $\bar{y} - \beta$ es inv! $\Rightarrow$ long max es 1.



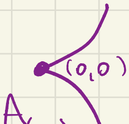
Ej.- $Y = \{ z^2 = xy \} \subset \mathbb{A}^3_k$ pero $A = k[x,y,z]/(z^2 - xy)$ es integralmente cerrado y así lo son sus locali zaciones y así para $\mathfrak{p}$ con $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$ estamos OK, aunque Y sea singular.

$$\left[\begin{array}{ll} k[u,v] \longleftarrow k[x,y,z]/(z^2-xy) & \Rightarrow \underline{A} \simeq k[u^2,v^2,uv] \subset k[u,v] \\ u^2 \longleftarrow\!\shortmid x & \\ v^2 \longleftarrow\!\shortmid y & \text{y } K(A) \not\simeq k(u,v) \\ uv \longleftarrow\!\shortmid z & \end{array}\right]$$

Tórico!

- Si A = dominio Noetheriano y $f \in A$ con $(f) = \mathfrak{p}$ primo $\Rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ tiene dim 1 y $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

Ej.- $A = k[x,y]/(y^2-x^3)$, k cuerpo, (x,y) ideal max



$\Rightarrow A_{(x,y)}$ tiene dim 1. Si fuese regular $\Rightarrow$ int. cerrado $\Leftrightarrow$ DVR ... pero no lo es.

$A_{(x,y)}$ no es DVR $\quad A_{(x,y)} \supset (\bar{x}, \bar{y}) \neq (u)$

Obs.- Los ejemplos más relevantes serán variedades no singulares $|_k$ y esquemas normales Noetherianos.

(1) En una variedad nosingular $|_k$ todo $\mathcal{O}_{X,p}$ es regular para p punto (localización de anillos locales reg es regular y $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}} \simeq (\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}}$)

(2) Esquema normal Noetheriano: Cualquier anillo local de dimensión 1 es un dominio integralmente cerrado $\Rightarrow$ es regular.

" Genéricamente sobre una variedad de codim 1 tenemos puntos no singulares " (No contenido en la parte sing)

(*) X = esquema Noetheriano integral separable regular en codim 1.

Def.- Sea X esquema con propiedad $(*)$.
Un <u>divisor primo</u> en X es un subesquema integral cerrado de codim 1.

Un <u>divisor de Weil</u> es un elemento del grupo abeliano libre

$$\mathrm{Div}(X) := \Big\{ \sum_{\text{finita}} n_i \Gamma_i \;:\; \begin{array}{l} \Gamma_i = \text{divisor primo} \\ n_i \in \mathbb{Z} \end{array} \Big\}$$

Si para $D = \sum n_i \Gamma_i$, $n_i \geq 0 \ \forall i$, entonces lo llamamos <u>divisor efectivo</u>.

Si $Y \subset X$ es divisor primo y $\eta \in Y$ es su punto genérico (corresponde a un primo en cada $\mathrm{Spec}(A) \subset X$)
$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$ es un DVR con cuerpo de fracciones $K(X)$.

[Esto no es $\mathcal{O}_{Y,\eta} \simeq K(Y)$]

$\mathbb{A}^2 \quad Y = \{y=0\}$

$k(x,y) \supset k[x,y]_{(y)} = u y^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$

$\;\;\psi$
$\;\;f \qquad v_Y(f) = \beta$

La valuación se denotará por v_Y.

<u>Ex 4.5 Ch II</u> : Si Y, Y' son div. primos dist $\Rightarrow v_Y \neq v_{Y'}$.

¿Será que un v en $K(X)$ define un Y?

$f = v y^{\beta}$, $\beta \in \mathbb{Z}$

$$X \quad {}_A \subset K(X) \supset \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \qquad K(\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}) = K(X)$$

Si $f \in K(X)^*$ $\Rightarrow v_Y(f)$ es un entero.
Si es positivo diremos que f tiene un <u>cero</u> en Y de orden $v_Y(f)$.
Si es negativo " " " " " <u>polo</u> en Y " " ".

<u>Lema 6.1</u> : X con $(*)$, $f \in K(X)^*$

$\Rightarrow v_Y(f) = 0$ salvo finitos divisores primos Y.

Dem:

- Tomar $f = \frac{g}{\ell} \in K(A) = K(X)$.
- En $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A_\ell) \subset X$, f es regular.
  $Z = X \setminus \mathcal{U}$ es conj cerrado propio de X.
- Como X es Noetheriano, tenemos que Z puede contener a lo más un número finito de divisores primos de X.

[$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Spec} A_i$, A_i Noeth $\Rightarrow$ $Z|_{\mathrm{Spec} A_i} = \emptyset$ o algo propio
(X es irreducible) $\Rightarrow$ $Z|_{\mathrm{Spec} A_i}$ se representa por
$\mathfrak{a} \subsetneq A$ y este tiene un número finito de primos minimales $\therefore$ finito de finitos da finitos]

- Así es suficiente mostrar que existen finitos $Y \subset \mathcal{U}$ con $v_Y(f) \neq 0$.
- Sabemos que $v_Y(f) \geq 0$ y $v_Y(f) > 0$ ssi
  $Y \subset V((f))$, $(f) \subset A_\ell$. Como $f \neq 0$, $V((f))$ es propio en $\mathrm{Spec}(A_\ell)$. Pero luego
  $V((f))$ = unión finita de cerrados irreducibles (espacio Noetheriano) ∎

Def.- X con $(*)$, $f \in K(X)^*$. Se define el <u>divisor de f</u> como:

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{Y \text{ div primo en } X} v_Y(f) \cdot Y .$$

Si $D = \mathrm{div}(f)$ $\Rightarrow$ se le llama <u>divisor principal</u>.

Notar que $f, g \in K(X)^* \Rightarrow \mathrm{div}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{div}(f) - \mathrm{div}(g)$.

$\Rightarrow$ tenemos morfismo de grupos

$$(K(X)^*, \cdot) \longrightarrow (\mathrm{Div}(X), +)$$
$$f \longmapsto \mathrm{div}(f)$$

cuya imagen es $\mathrm{PDiv}(X) = \{$divisores principales$\}$.

$\boxed{\text{Def}}$.- X con $(*)$. Dos divisores D, D' son <u>linealmente equivalentes</u> $(D \sim D')$ si $D - D'$ es divisor principal.

Grupo de clases de X $= Cl(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{PDiv}(X)$

Fácil ver que es un invariante (y muy interesante) y difícil de calcular en general.

<u>Prop 6.2</u>: A = dominio Noetheriano. Entonces

A es DFU $\Leftrightarrow$ Spec A es normal y $Cl(A) = 0$.

<u>Dem</u>: Un DFU es integralmente cerrado $\Leftrightarrow$ Spec A normal.

(I. 1.12A) DFU $\Leftrightarrow$ todo ideal primo de altura 1 es principal

$\therefore \Rightarrow$) OK

$\Leftarrow$) Para el resto se usa que A dominio Noeth int cerrado

$\Rightarrow$
$$A = \bigcap_{\substack{\text{dim } \mathfrak{p} \\ \text{es } 1}} A_{\mathfrak{p}} \ni f$$
$$\Downarrow$$
$$f \in A$$

Y primo $\mathfrak{p}$, $Y = \mathrm{div}(f)$

$f \in K(A)$

$f \in A_{\mathfrak{p}}$ $\quad$ $f \in A_{\mathfrak{p}'}$

$v_Y(f) = 1$ $\quad$ $v_Y(f) = 0$

y de hecho $\mathfrak{p} = (f)$ ∎

Ej 0: $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, y tiene dimensión 1. $\mathfrak{p} = (2, 1+\sqrt{-5})$. Sea $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Tenemos $A/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_2$ $\quad$ $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{m} = \langle 1+\sqrt{-5} \rangle$

ya que $(1+\sqrt{-5}) \cdot \dfrac{1-\sqrt{-5}}{3} = 2$ y $3 \notin \mathfrak{p}$.

Se puede mostrar que $\mathfrak{p}$ no es principal.
De hecho $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \underbrace{(2, 1+\sqrt{-5})}_{Y} \rangle$

[$2Y$ corresponde a $\mathfrak{p}^2 = \langle 2 \rangle$]

En efecto dado
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \subset & K = \text{cuerpo de número} \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{Z} & \subset & \mathcal{O}_K = \text{integrales sobre } \mathbb{Z} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cl}(K) \cong \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K))$.

Para $\sqrt{d}$, $d<0$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, los $\mathcal{O}_K$ DFU son

$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$

Ej 1: $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n_k) = 0$ ya que $k[x_1, \dots, x_n]$ es DFU.

Prop 6.4: $X = \mathbb{P}^n_k$ k = cuerpo. Para cada $D = \sum n_i Y_i$ digamos que

$$gr(D) := \sum n_i \cdot gr(Y_i) ;$$

$X = \{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3_k$

donde $gr(Y_i)$ = grado hipersuperficie Y_i.

$\Downarrow$

$Cl(X) \simeq \mathbb{Z}^7$

$\cup$

$\mathbb{Z} = \langle H \rangle$

Sea $H = \{x_0 = 0\}$. Entonces: $D = \sum n_i \underbrace{Y_i}_{\{f_i = 0\}}$

(a) Si $gr(D) = d \Rightarrow D \sim dH$.

(b) $\forall f \in K(X)^* \Rightarrow gr(\operatorname{div}(f)) = 0$.

(c) $\deg : Cl(X) \to \mathbb{Z}$ es isomorfismo.

$\prod_{i=1}^{r} f_i^{n_i} \cdot x^{-d}$

$\shortparallel$

$\operatorname{div}(f) = D - dH \Leftarrow K(X)^* \ni f$

$\mathbb{P}^n_k$

Dem: Un divisor primo en $\mathbb{P}^n_k$ corresponde a un ideal homog. primo de altura 1 en $k[x_0, \ldots, x_n]$ y así principal (g).
Dada una hipersuperficie cualquiera $Y = \{f = 0\} \Rightarrow f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_s^{\alpha_s}$ y $gr(Y) = \sum \alpha_i gr(f_i)$ y $Y_i = \{f_i = 0\}$ son primos.

$\therefore$ (a) ✓ (b) ✓ (c) ✓ ∎

Prop 6.5 X con $(*)$, $Z \subset X$ propio cerrado y $\mathcal{U} = X \setminus Z$. Luego

(a) $\exists\ Cl(X) \twoheadrightarrow Cl(\mathcal{U})$, $D = \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$.

(b) Si $\operatorname{codim}(Z, X) \geq 2 \Rightarrow$ (a) es isomorfismo.

(c) Si Z = irred codim 1 $\Rightarrow$ existe suc. exacta:

$$\mathbb{Z} \to Cl(X) \to Cl(\mathcal{U}) \to 0 .$$

Dem: Fácil ∎

Ejemplos varios:

Ex 6.51: Y curva irreducible de grado d en $\mathbb{P}^2_k$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & Cl(\mathbb{P}^2_k) & \longrightarrow & Cl(\mathbb{P}^2_k \setminus Y) & \longrightarrow & 0 \\ 1 \mapsto Y & & \wr\!\| & & & & \\ & & \mathbb{Z} = \langle L \rangle & & & & \end{array}$$

$$y \quad Y = dL \text{ en } Cl(\mathbb{P}^2_k) \quad \Rightarrow \quad Cl(\underbrace{\mathbb{P}^2_k \setminus Y}_{\text{var. afín}}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

Ej: Variedad tórica.

- $(k^*)^n = \mathcal{U} \subset \mathbb{A}^n_k \Rightarrow \underset{0}{\underset{\|}{Cl(\mathbb{A}^n_k)}} \twoheadrightarrow Cl(\mathcal{U})$

  $\Rightarrow Cl(\mathcal{U}) = 0$.

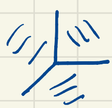
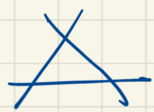
- X variedad tórica $\Rightarrow (k^*)^n = \mathcal{U} \subset X$

  $X \setminus \mathcal{U} = D_1 + \dots + D_r$ divisores tóricos

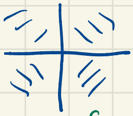
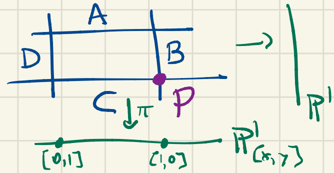
  $$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} D_i \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow \underset{0}{\underset{\|}{Cl(\mathcal{U})}} \longrightarrow 0$$

  $$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} D_i \twoheadrightarrow Cl(X)$$

  ie, $Cl(X)$ está generado por los divisores tóricos.

EjEj:  $\mathbb{P}^2_k \supset \underbrace{L_1 + L_2 + L_3}_{\text{div tóricos}}$ 

Pero $\bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z} L_i \twoheadrightarrow Cl(\mathbb{P}^2_k)$ es mucho! $\quad L_1 \sim L_2 \sim L_3$

Ej:  $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \supset$ 

$f = f' \circ \pi$ $\quad f' = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow \quad Cl(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k) = \langle A, B, C, D \rangle_{\mathbb{Z}}$

pero $\exists f$ tal que $\operatorname{div} f = B - D \qquad B \sim D$
$\exists g$ " " $\operatorname{div} g = A - C \qquad A \sim C$

$\Rightarrow \quad Cl(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k) = \langle A, B \rangle$

Si $aA + bB = \operatorname{div}(f)$, entonces

En $\mathbb{P}^1_k = C$, $\quad aA + bB\big|_C = \operatorname{div}(f_C)$

$\Rightarrow \quad bP = \operatorname{div}(f_C)$ ie solo polo o cero $\rightarrow\leftarrow$
o menos que $b = 0$

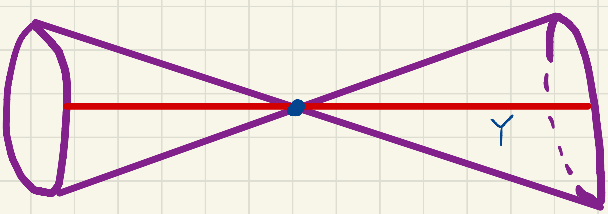
$\therefore \; a = 0$ también usando D

$\Rightarrow \quad Cl(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k) \simeq \mathbb{Z}A \oplus \mathbb{Z}B$.

$\boxed{\begin{array}{l} X = \text{var}/_k \\ D \sim D' \\ D - D' = \operatorname{div}(f) \\ \text{ej} \quad \text{ej} \\ X \quad D \sim D' \\ \downarrow f \\ \mathbb{P}^1_k \ni 0, \infty \\ \quad \text{cero polos} \end{array}}$

Ex 6.5.2: k cuerpo, $A = k[x,y,z]/(xy - z^2)$
$X = \operatorname{Spec}(A)$.

$\Rightarrow \quad Cl(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $\{y = z = 0\} = Y$



- Notar que $X \setminus Y = \mathcal{U} = \operatorname{Spec} A_y$
[como conjunto cerrado, $\{y=0\} = Y$]
- Pero $A_y = \left(k[x,y,z] \big/ (xy - z^2) \right)_y = k[x,y,y^{-1},z] \big/ (xy - z^2)$

$\therefore\ x = y^{-1} \cdot z^2 \Rightarrow A_y = k[y, y^{-1}, z]$ ie $k^* \times k$ un abierto de $k^2 \Rightarrow Cl(\mathcal{U}) = 0$.

$$\therefore\ Cl(X) = \langle Y \rangle .$$

- La función y en Y nos da $v_Y(y) = 2$.
Esto porque $A_{(y,z)} \supset (y,z)$
pero $y = x^{-1} z^2 \Rightarrow A_{(y,z)} \supset (\underbrace{z}_{\text{parámetro}})$
y $v_Y(y) = 2$. $\therefore\ 2Y = \operatorname{div}(y)$.
- Luego $Cl(X) = 0$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Sabemos que A es integralmente cerrado (variedad tórica).

Y trivial en $Cl(X) \iff (y,z)$ principal en A

En $k[x,y,z]$, $(y, z, xy - z^2)$ es la preimagen de (y,z). Sabemos que si $\mathfrak{m} = (x,y,z)$
$\Rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq k^3$ y la imagen de $(y, z, xy - z^2)$ tiene dim 2. Si fuese principal $\Rightarrow$ dim $= 1$ o 0 $\rightarrow\leftarrow$

$\therefore \quad Cl(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejl.- X = cúbica no singular en $\mathbb{P}^3_k$

$\Rightarrow Cl(X) \simeq \mathbb{Z}^7$.

¿ Quién es $Cl(X)$ si X = curva proy nosing ?

$$0 \to \underbrace{\ker^{(\deg)}}_{\text{otra var. alg.}} \to Cl(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\sum n_i P_i \mapsto \sum n_i$$

[Mirar Hartshorne para Divisores en curvas y otros detalles; miraremos eso cuando tengamos la semana de curvas al final de Noviembre]

Los otros divisores : Divisores de Cartier

$\boxed{\text{Def}}$.- X = esquema localmente Noetheriano. [controversia Kleiman]
Para cada $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A)$:

$S = A \setminus \{\text{divisores del cero}\}$ y $K(\mathcal{U}) := S^{-1}A$ [localiz. AT. Mac.]

Al variar $\mathcal{U}$, los anillos $K(\mathcal{U})$ forman un pre-haz [Mirar Kleiman]

$$\mathcal{U} \mapsto K(\mathcal{U})$$

El haz asociado $\mathcal{K}_X$ se llama el haz de cocientes totales de $\mathcal{O}_X$.

[Es el reemplazo de $K(X)$ cuando X = integral]

$\boxed{\text{Def}}$.- Sea $\mathcal{K}_X^*$ el haz de los elementos invertibles del haz $\mathcal{K}_X$ (haz de grupos con multiplicación). Así se define $\mathcal{O}_X^*$ a partir de $\mathcal{O}_X$.

$\boxed{\text{Def}}$.- Un divisor de Cartier en X es una sección global de $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$

$$\left[\quad 0 \to \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0 \right], \text{ i.e.,}$$

D divisor de Cartier si existe $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ y para cada i, $f_i \in \Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{K}_X^*)$ tal que $\forall i,j$ $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Un divisor de Cartier es principal si está en la imagen de $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

$$\boxed{D = \{(U_i, f_i) : \ f_i/f_j \in \Gamma(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, \mathcal{O}_X^*)\}}$$

Ejl.- $\mathbb{P}_k^1 = X$, $D = \{(x, \mathbb{A}_x^1), (y, \mathbb{A}_y^1)\}$ $\frac{x}{y}$ es $\mathcal{O}_X^*$

No es principal ya que no tiene polos!.

$\boxed{\text{Def}}$.- Dos divisores de Cartier son l. equiv. si su diferencia (multiplicativa) es principal.

$$\{(f_i, \mathcal{U}_i)\} \bullet \{(g_j, \mathcal{U}_j)\} = \{(f_i g_j, \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)\}$$

Prop 6.11: Si X = esquema integral separable Noetheriano con todos sus anillos locales DFU (ie loc. factorial). Entonces,

$$\mathrm{Div}(X) \simeq \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \qquad \mathrm{PDiv}(X) \simeq \mathrm{PrinCartier}(X).$$

"Dem":- • $\mathcal{O}_{X,P}$ son DFU $\Rightarrow$ son int. cerrados $\Rightarrow$ X es normal.

• Luego $\mathcal{K}_X$ es el haz constante $K(X)$.

$\therefore$ $\{(\mathcal{U}_i, \underset{K(X)^*}{\underset{\cap}{f_i}})\}$ Cartier $\mapsto$ $D = \sum_{Y \cap \mathcal{U}_i \neq \phi} v_Y(f_i) Y$

y notar f_i/f_j unidad $\Rightarrow$ $v_Y\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = 0$ y la suma es finita.

Notar que es morfismo: $\cdot \mapsto +$.

• Notar que principal va a principal.

• Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ y $x \in X$ punto
$\Rightarrow$ D definirá un divisor en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$: D_x

• Luego, como $\mathcal{O}_{X,x}$ DFU $\Rightarrow$ $D_x = \{f_x = 0\}$, $f_x \in K(X)^*$.

$\therefore$ D y $\overset{= \mathrm{div}(f_X)}{D_X}$ difieren en X sólo por finitos div primos que no pasan por x.

$\therefore$ $\mathcal{U}_X$ abierto con $D = D_X$ en $\mathcal{U}_X$
$\Rightarrow$ $\{(\mathcal{U}_X, f_X)\}$ es el Cartier ... ∎

seguir Hartshorne

$\Rightarrow$ Anillos locales regulares son DFU $\Rightarrow$ válido para esquemas regulares

$\longrightarrow$ $X = \mathrm{Spec}\left(k[x,y,z]/(xy - z^2)\right) \Rightarrow \mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \mathrm{CaCl}(X) = 0$

La última parte aquí: El grupo de Picard.

$\boxed{\text{Def}}$.- X = espacio anillado. Un **haz invertible** es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango 1.

Prop: $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ invertibles $\Rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ invertible.
$\mathcal{L}$ invertible $\Rightarrow \exists\, \mathcal{L}^{-1}$ invertible con $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$.

Dem.- Considerar $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ ■

$\boxed{\text{Def}}$.- X = espacio anillado, el **grupo de Picard** de X es

$$\operatorname{Pic}(X) := \left(\begin{array}{c}\text{clases de isomorfismo} \\ \text{de haces invertibles}\end{array} , \otimes \right).$$

Obs: En el futuro veremos que $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq \operatorname{Pic}(X)$.

$\boxed{\text{Def}}$.- Sea $D = \{(U_i, f_i)\}$ divisor de Cartier en X.
Se define $\mathcal{O}_X(D)$ como el subhaz de $\mathcal{K}_X$ tomando los módulos generados por f_i^{-1} en U_i:

$$\mathcal{O}_X(D)\big|_{U_i} := f_i^{-1} \cdot \mathcal{O}_{U_i}.$$

Está bien definido ya que en $U_i \cap U_j$: f_i^{-1} y f_j^{-1} generan el mismo submódulo (en $\mathcal{K}_X(U_i \cap U_j)$).

Ej.- En $\mathbb{P}^1$ tomar $D = \{(\mathbb{A}^1_x, x), (\mathbb{A}^1_y, y)\}$.

$$\mathcal{O}_X(D)\big|_{\mathbb{A}^1_x} = x^{-1} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_x} \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_X(D)\big|_{\mathbb{A}^1_2} = y^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_2}$$

¡Cuidado!: Mostrar que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Prop: X esquema (loc. Noetheriano). Entonces:

(a) $\forall D$ Cartier, $\mathcal{O}_X(D)$ es un haz invertible.
Esto da una correspondencia 1-1 entre divisores de Cartier y haces invertibles.

(b) $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D_2)$.

(c) $D_1 \sim D_2 \iff \mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2)$.

Teo: $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ es un isomorfismo entre

$$\mathrm{CaCl}(X) = \mathrm{Cartier}/\mathrm{Princ} \quad \text{y} \quad \mathrm{Pic}(X).$$

cuando X = integral loc. noetheriano.

Cor: Si X es noetheriano, integral, separado, localmente factorial, entonces

$$\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X).$$

Cor: Todo haz invertible en $\mathbb{P}^n_k$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)$ $\forall \ell \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Def}}$.- Un div Cartier es *efectivo* si $\{(U_i, f_i)\}$ tiene $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$. En tal caso se define el subesquema cerrado de codim 1 Y cuyo haz de ideales está localmente generado por f_i.

Prop.- D div efectivo, Y subesquema asociado
$\Rightarrow \mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{O}_X(-D)$. **Dem:** Por definición.

	12O Hoy		14O Mor proy 1	
R	19O E C	E	21O S O	U C
T4	26O Mor proy 2		28O Diferencial	
	2N Coh 1		4N Coh 2	
T5	9N Groth/Serre		11N Čech	
	16N Coh $\mathbb{P}^n$		18N Dual Serre	
T6	23N Dual Serre		26N Varios	
C	30N U	R V	2D A S	

Fin

$\underbrace{\hspace{6em}}$ horarios?

(con Ignacio Barros)

T7

13-Dic