$\mathbb{P}^n$

ga17

14/10/21

morfismos proyectivos

26/10/21

§7 Morfismos proyectivos.

<u>Pregunta</u>: Dado $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k \end{array}$ ¿Cuándo $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$? ¿ $\hookrightarrow$?

<u>Clave</u>: El haz invertible $\mathcal{O}(1)$ en $\mathbb{P}^n_k$ el cual tiene como secciones globales $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1)) = \bigoplus_{i=0}^{n} k x_i$ a las coordenadas.

$=A$ $\Rightarrow$ Si $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$, entonces existe $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) =: \mathcal{L}$ generado por secciones globales $s_i = \varphi^*(x_i) \in \Gamma(X, \mathcal{L})$.

$\{s_i\}_{i\in I}$ $s_i \in \Gamma(\mathcal{L})$ tal que Dado $p \in X$, $\exists\, s \in A$ $\mathcal{L}_p = \langle s_p \rangle$ como $\mathcal{O}_{X,p}$-mod.

<u>Ej</u>: $\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1_k$ $\varphi([x,y]) = [x^2, y^2]$. Luego $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(2)$

Notar que x^2, y^2 generan $\mathcal{O}(2)$

<u>Pero</u> $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(2)) = kx^2 \oplus kxy \oplus ky^2$.

<u>Ej</u>: $\mathbb{P}^2_k \overset{\sigma}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2_k$ $\sigma([x,y,z]) = [xy, xz, yz]$

Notar que xy, xz, yz no generan $\mathcal{O}(2)$

Notar que existe $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}^2_k$ donde $\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{P}^2_k$.

<u>Ej</u>: $(\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^n_k))$

Para una matriz de $GL(n+1, k)$ tenemos un automorfismo (les llamamos cambio de coordenadas) y esto salvo la acción de

$$k^* = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in k^* \right\}$$

$\Rightarrow \quad PGL(n+1,k) \leq Aut(\mathbb{P}^n_k)$.

Ahora $\varphi \in Aut(\mathbb{P}^n_k) \Rightarrow \varphi^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}(r) \ \forall r$.

Pero debe generar a $Pic(\mathbb{P}^n_k) \Rightarrow r = \pm 1$.

Pero hay secciones $\Rightarrow r = 1$.

Como es automorfismo, $\varphi^*(x_i)$ es otra base de $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$

$$\therefore \quad Aut(\mathbb{P}^n_k) \simeq PGL(n+1,k).$$

Teorema 7.1 "resumen": A = anillo, X = esquema sobre $Spec(A)$.

(a) $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ morfismo sobre $Spec A$

$\Rightarrow \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ es invertible y generado por $\varphi^*(x_i)$.

(b) Al revés, si $\mathcal{L}$ invertible y generado globalmente por $s_0, \dots, s_n \Rightarrow \exists! \ \varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ tal que

$$\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L} \quad \text{y} \quad \varphi^*(x_i) = s_i.$$

Prop 7.2 El $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ de arriba es una inmersión cerrada ssi

(1) Cada abierto $X_i = X_{s_i} = \{P \in X : (s_i)_P \notin m_P \mathcal{L}_P\}$ es afín, y

(2) Para cada i, el morfismo

$$A[y_0, \dots, y_n] \longrightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$$
$$y_j \mapsto \frac{s_j}{s_i}$$

es sobre.

Prop 7.3 (inmersión cerrada geométrica) Sea $k=\bar{k}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^m_k \supseteq X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

$\underbrace{\mathbb{P}^m_k \supseteq X}_{X \text{ esquema proyectivo}}$

$\mathcal{L} := \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ $\qquad V = \langle s_0, \dots, s_n \rangle \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$

$s_i := \varphi^*(x_i)$

Entonces,

φ es inmersión cerrada $\iff$

(1) V separa puntos, ie dados $p, q \in X$ puntos cerrados $\exists s \in V$ con $s \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p$ pero $s \notin \mathfrak{m}_q \mathcal{L}_q$.

(2) V separa vectores tangentes, ie $\forall p \in X$ cerrado, $\{s \in V : s_p \in \mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p\}$ genera el k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_p \mathcal{L}_p / \mathfrak{m}_p^2 \mathcal{L}_p$.

Dem: La parte no trivial es $\Leftarrow$ y será verificada la inmersión cerrada a través de los anillos locales en puntos cerrados de X y $\mathbb{P}^n_k$. Queremos sobreyectividad y eso sale de:

Lema 7.4: $A \xrightarrow{f} B$ morfismo local entre anillos locales Noetherianos tal que

(1) $A/\mathfrak{m}_A \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{m}_B$ (usando punto cerrado y $k=\bar{k}$)

(2) $\mathfrak{m}_A \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ (usando separar vectores)

(3) B es f.g. A-módulo (usamos X proy y prop. de composición)

$\Rightarrow f$ es sobre.

Dem • $\mathfrak{a} := \mathfrak{m}_A \cdot B$, así $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_B$ y $\mathfrak{a}$ contiene un conj. de generadores de $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ por (2).

[ATMac] (*) Lema de Nakayama: M f.g. B-modulo y $N \subset M$ B-modulo tal que $M = N + \operatorname{Jac}(B) M \Rightarrow M = N$,

$\operatorname{Jac}(B) = \bigcap$ ideales maximales $= \{x \in B : 1 - xy \text{ unidad } \forall y \in B\}$

(Por (*)) • $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_B$ f.g. B-módulo, $\mathrm{Jac}(B) = \mathfrak{m}_B$ y $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_B^2 \Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_B$. (No hay renumeración!)

(Por (*)) • $\langle 1 \rangle \subset B$ f.g. A-módulo (3), $\mathrm{Jac}(A) = \mathfrak{m}_A$ y $B = \langle 1 \rangle + \mathfrak{m}_A B$ ya que

$$B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B = A/\mathfrak{m}_A = k \quad \text{por (1)}$$

(ie 1 genera $B/\mathfrak{m}_A B$)

$\Rightarrow \langle 1 \rangle_A = B$, ie, f es sobre ■

generen sus propios ejemplos
$k[t] \to k[s]$
$t \mapsto s^2$
$k[t] \leftarrow k[x,y]/(y^2-x^3)$
$t^2 \leftarrow\!\shortmid\, x$
$t^3 \leftarrow\!\shortmid\, y$

¿Cómo reconocer un $\mathcal{L}$ muy amplio?

Ya vimos

(Serre: $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$, $X \to \operatorname{Spec} A$ Noeth, $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$)

$\mathcal{L}$ muy amplio y $\mathcal{F}$ haz coherente $\Rightarrow \exists\, n_0 > 0$ tal que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ esté generado por secciones globales $\forall n \geq n_0$.

$\boxed{\text{Def}}$.- X = esquema Noetheriano, $\mathcal{L}$ haz invertible. Decimos que $\mathcal{L}$ es amplio si $\forall\, \mathcal{F}$ haz coherente $\exists\, n_0 > 0$ (depende de $\mathcal{F}$) con

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ generado por secciones globales $\forall n \geq n_0$.

Teorema: X = esquema de tipo finito sobre $\operatorname{Spec} A$
A = anillo Noetheriano
$\mathcal{L}$ = haz invertible en X. Entonces

$$\mathcal{L} \text{ amplio} \iff \mathcal{L}^m \text{ muy amplio sobre } \operatorname{Spec} A \ \ \exists\, m > 0.$$

Dem: Mirar Thm 7.6 Hartshorne ■

Ej.- $\mathcal{O}(\ell)$ amplio $\iff$ $\mathcal{O}(\ell)$ muy amplio $\iff$ $\ell > 0$
en $\mathbb{P}^n_k$, k cuerpo

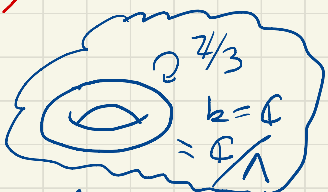
(usar mapeo de Veronese)

Ej.- $Q = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$, $\mathrm{Pic}(Q) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

y así $\mathcal{L} \longleftrightarrow (a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

(a,b) amplio $\iff$ (a,b) muy amplio $\iff$ $a, b > 0$

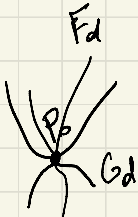
$$\left(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \underset{\text{2 veroneses}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{n_1}_k \times \mathbb{P}^{n_2}_k \underset{\text{1 Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_k \right)$$



Ej.- $X = \{ y^2 z = x^3 - x z^2 \} \subseteq \mathbb{P}^2_k$

Entonces $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(P_0)$ no es muy amplio, donde $P_0 \in X$ punto cerrado.

Notar que



$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(P_0)) = \{ f \in K(X)^* : \mathrm{div}(f) + P_0 \geq 0 \} \cup \{0\}$$

(ie, $f = \frac{F_d}{G_d}$ tal que $G_d \cap X \leq P_0$ $\to\leftarrow$ a menos que G_d constante)

$(d-1)P_0 - dP_0$

$\Rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(P_0)) = k$ y así no está globalmente generado.

$X \xrightarrow[\sim]{f} \mathbb{P}^1_k$

$\deg(f) = 1$
$\parallel$
$\sum d_i$

bien def

restricción rectas a X. $\Rightarrow \mathcal{L}$ es amplio

Pero $\mathcal{O}_X(3P_0)$ es muy amplio ya que es isomorfo a $i^*\mathcal{O}(1)$ (de hecho, podemos tomar P_0 como punto de inflexión y tener una recta L tal que $L \cap X = 3P_0$).

En efecto:

(1) D divisor en una X curva proy nosing$/_{k=\bar{k}}$, entonces
D amplio $\Leftrightarrow$ $gr(D)>0$ (será por Riemann-Roch)

(2) D divisor en X superf. proy nosing$/_{k=\bar{k}}$, entonces
D amplio $\Leftrightarrow$ $D\cdot D>0$ y $D\cdot C>0$ $\forall C\subset X$ curva.

Los clásicos sistemas lineales.

X = variedad proy. nosing$/_{k=\bar{k}}$

Aquí $Cl(X)\simeq CaCl(X)\simeq Pic(X)\ni[\mathcal{L}]$

y $\Gamma(X,\mathcal{L})$ es de dimensión finita.

Si $s\in\Gamma(X,\mathcal{L})$ sección no cero, sea

$$D=(s)_0$$

el divisor de ceros de s: Si $\mathcal{U}\subset X$ abierto donde $\varphi:\mathcal{L}|_{\mathcal{U}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $\varphi(s)\in\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathcal{U}})$

$\Rightarrow$ $\{(\mathcal{U},\varphi(s))\}$ determina un divisor de Cartier efectivo D en X.

Prop 7.7: Sea D_0 divisor en X y $\mathcal{L}\simeq\mathcal{O}_X(D_0)$.

(a) $0\neq s\in\Gamma(X,\mathcal{L})$ $\Rightarrow$ $(s)_0\sim D_0$.
(b) Todo divisor efectivo $\sim D_0$ es un $(s)_0$.
(c) $s,s'\in\Gamma(X,\mathcal{L})$ definen el mismo divisor de cero ssi $\exists\lambda\in k^*$, $s'=\lambda s$.

Dem:

$(s)_0 = D$

(a) • $\mathcal{L}$ es un subhaz de $\mathcal{K}_X$, y así $s \in K(X)^*$.

• $D_0 = \{(\mathcal{U}_i, f_i) : f_i \in K(X)^*\}$, $\mathcal{O}_X(D_0)|_{\mathcal{U}_i} \simeq f_i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$.

$\Rightarrow$ tenemos un isom $\varphi : \mathcal{O}_X(D_0) \xrightarrow[\simeq]{\cdot f_i} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$

• Luego D está localmente definida por $f_i \cdot s$ (por definición!)

• Luego $D = D_0 + \mathrm{div}(s) \Rightarrow D \sim D_0$.

(b) Si $D > 0$ y $D = D_0 + \mathrm{div}(f) \Rightarrow \mathrm{div}(f) \geq -D_0$.
Luego f es sección global de $\mathcal{O}_X(D_0)$ cuyo divisor de ceros es D.

(c) Si $(s)_0 = (s')_0 \Rightarrow \underset{s}{f}, \underset{s'}{f'} \in K(X)$ $\mathrm{div}\left(\frac{f}{f'}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{f}{f'} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$ ya que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ ∎

Resumen: Teniamos $D = \{(\mathcal{U}_i, f_i)\}$ divisor de Cartier define $\mathcal{O}_X(D)$ tal que

$$\mathcal{O}_X(D)|_{\mathcal{U}_i} \simeq f_i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}.$$

Entonces $\mathcal{O}_X(D)(\mathcal{U}_i) \simeq f_i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{U}_i)$ y así

$$\mathcal{O}_X(D)(\mathcal{U}_i) = \{ f \in K(X)^* : f = \text{reg en } \mathcal{U}_i \cdot f_i^{-1} \} \cup \{0\}$$

$$= \{ f \in K(X)^* : \underbrace{\mathrm{div}(f) + D|_{\mathcal{U}_i}}_{\text{divisores efectivos} \sim \text{a } D} \geq 0 \} \cup \{0\}$$

ie, funciones racionales con ceros y polos acotados por D

Ej: Sean $P, Q \in \{ZY^2 = X^3 + AXZ^2 + BZ^3\} = X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dos puntos distintos en la cúbica nosingular.

$\Rightarrow \quad \Gamma(X, \mathcal{O}_X(P-Q)) = ?$

Si $f \in$ $\Rightarrow$ $\operatorname{div}(f) + P - Q \geq 0$.
Como f debe tener polo $\Rightarrow$ polo tiene orden 1 en P (no puede ser más!).

$f = \dfrac{F_d}{G_d} \quad \Rightarrow \quad \#\text{ceros} = \#\text{polos}$

y $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $x \mapsto [F_d(x), G_d(x)]$

Pero X suave $\Rightarrow$ $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y polos en $f^{-1}[1,0]$, ie grado de f es 1 y así f es un isomorfismo.

PERO entonces la inversa de f parametriza X y sabemos que X NO es parametrizable por funciones polinomiales $\rightarrow\leftarrow$

Luego $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(P-Q)) = \{0\}$.

[Sabemos que para una curva X, si $f \in K(X)^*$ $\Rightarrow$ $\operatorname{gr}(f) = 0$. [Ver Divisors on Curves p. 136]]

¿Cómo saber existencia de funciones racionales con ceros y polos preasignados?

Def.: Un *sistema lineal completo* es

$$|D_0| = \{ D \geq 0 : D \sim D_0 \}.$$

De esta forma está en correspondencia 1-1 con

$$\big(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_0)) \setminus \{0\} \big) / k^*$$

ie puntos cerrados de $\mathbb{P}_k^{\dim \Gamma - 1}$.

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_0))$ // base $|_k$ $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$

$X \xrightarrow{\varphi} [s_0, s_1, \dots, s_n]$

$\varphi^*(\ )$ $\quad a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$

Def.: Un *sistema lineal* δ en X es un subconj. de un $|D_0|$ correspondiente a un subespacio lineal de $\mathbb{P}_k^{\dim \Gamma - 1}$.

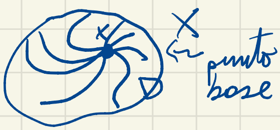
Así δ corresponde a un subespacio $V \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_0))$

$$V = \{ s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_0)) : \operatorname{div}(s) + D \in \delta \} \cup \{0\}.$$

$\dim_k \delta := \dim_k V - 1$.

Def.: Un punto $x \in X$ es punto base de δ si

$$x \in \operatorname{Supp}(D) \quad \forall D \in \delta.$$



dar $X \to \mathbb{P}^n_k$ $\Leftrightarrow$ dar un δ sin puntos base y $s_0, \dots, s_n \in V$ generadores de V.

Ej: $\mathcal{O}(d)$ definen el sistema lineal completo de todas las formas de grado d

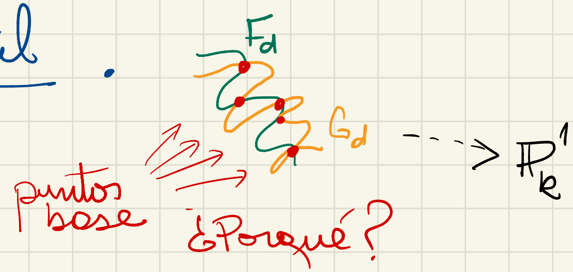
$\mathbb{P}^2$ $\{F_d = 0\}$ todos

$$\dim = \binom{n+d}{d} - 1 .$$

Ej: Sean $A = \{F_d = 0\}$ y $B = \{G_d = 0\}$ dos curvas del mismo grado en $\mathbb{P}^2_k$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = \{ \lambda F_d + \mu G_d \; : \; [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_k \}$$

es un sistema lineal de dim 1, ie, un <u>péncil</u>.



Ej: (cúbica torsida es única)

$\mathbb{P}^1_k \simeq X \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^3_k$ tal que $gr(X) = 3$ y $X \not\subset \overset{\text{Plano}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}^2_k}}$.

Como $gr(X) = 3 \Rightarrow i^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}(3)$.

Como $X \not\subset \mathbb{P}^2 \Rightarrow \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) \hookrightarrow \Gamma(X, i^*(\mathcal{O}(1)))$

Como $\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(3)) = 4 \Rightarrow$ isomorfismo

y δ es completo. Luego salvo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3_k)$ la cúbica torsida es $[x^3, x^2y, xy^2, y^3]$.

Ej: Veamos lo mismo en grado 4:

$\mathbb{P}^1_k \simeq X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^3_k$ tal que $gr(X) = 4$ y $X \not\subset \mathbb{P}^2_k$

$\therefore$ sólo fallamos en dimensión. En efecto no existe $T \in Aut(\mathbb{P}^3_k)$ tal que $T(X) = X$ donde

$$X_0 : [x^4, x^3y, xy^3, y^4]$$

y

$$X_a : [x^4, x^3y + a x^2y^2, xy^3, y^4]$$

donde $a \in k^*$. Notar que ambos son $\mathbb{P}^1_k$:

Al repasar Prop. 7.3, nos queda:

$\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ morfismo correspondiente a δ.

ϕ es inmersión cerrada $\Longleftrightarrow$ (1) δ separa puntos

Dado dos puntos cerrados $P, Q \in X$, $\exists D \in \delta$ con

$P \in Supp(D)$, $Q \notin Supp(D)$

(2) δ separa vectores tangentes

$P \in X$ punto cerrado y $t \in T_p(X) = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$

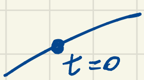
$\exists D \in \delta$ tal que $P \in Supp(D)$ y $t \notin T_p(D)$.

(1) $[a,b]$, $[c,d]$

$b^4x^4 - a^4y^4$ funciona salvo raíces

$bx^4 - ax^3y$ lámida t

(2)



λt

necesitamos $D = \{t = 0\}$

ya que entonces $T_p(D) = \{0\}$

Ej.- $\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{P}^2_k$ $\qquad \mathrm{Im}(\phi) = \{ y^3 = x^2 z \}$

$[t, u] \mapsto [t^3, t^2 u, u^3]$

Separa puntos. $P = [0, 1]$

$\therefore$ $D \in \delta$ tal que $P \in D$ son $at^3 + bt^2 u$

y así $T_P(D) = kt$.

Ahora varias construcciones de esquemas a partir de un esquema dado.

La idea será generalizar con

Spec

- morfismos afines
- cubrimientos cíclicos
- fibraciones en $\mathbb{A}^n$

y Proy

- Blow-up sobre un haz de ideales coherente $\longrightarrow$ Eliminación de la indeterminación de aplicaciones racionales
- fibraciones en $\mathbb{P}^n$

Morfismos afines y Spec $\mathcal{A}$ (Exerc. 5.17)

- $X \xrightarrow{f} Y$ entre esquemas es <u>afín</u> $\iff f^{-1}(\operatorname{spec} A)$ afín.
- Un morfismo finito es afín.
- Sea Y esquema y $\mathcal{A}$ haz cuasi-coherente de $\mathcal{O}_Y$-álgebras.

  Luego $\exists!$ esquema $X := \operatorname{Spec} \mathcal{A} \xrightarrow{f} Y$ morfismo afín con $f_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{A}$.

  En efecto, es una correspondencia 1-1 a través de $f_* \mathcal{O}_X$.

  ¿Cómo construir una tal álgebra?

$\mathbb{A}^1$

$$\begin{tikzcd} \{y^n = x(x-1)\} \subseteq \mathbb{A}^2 \arrow[d, "n:1"'] & (x,y) \arrow[d, mapsto] \\ \mathbb{A}^1 & x \end{tikzcd}$$

$\sqrt[n]{\ }$

Construcción de raíces n-ésimas de divisores (Esnault-Viehweg):

Sea Y = var. proy. nosingular $|_{k=\bar{k}}$, $\operatorname{mcd}(\operatorname{char} k, n) = 1$

D divisor efectivo de Y y asumir $\exists \mathcal{L}$

$D = \{x^3+y^3+z^3=0\} \subseteq \mathbb{P}^2$

$\boxed{\mathcal{O}(1)^{\otimes 3} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$

$$\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_Y(D).$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to (\mathcal{L}^{-1})^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_Y(-D) \to \mathcal{O}_Y$$

y así tenemos multiplicación bien definida

$$\mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{L}^{-j} \to \mathcal{L}^{-i-j}$$

$$\therefore \ \mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i} \text{ es } \mathcal{O}_Y\text{-álgebra y}$$

$(\mathcal{L}^0 := \mathcal{O}_Y)$

$$X := \operatorname{Spec}(\mathcal{A}) \xrightarrow{f} Y$$

representa la n-ésima raíz de D.

¡Hay un mundo de construcciones a través de esas raíces! Se puede escribir normalización y muchas otras propiedades de X.

Su versión afín local es $z^n = f(x_1, \dots, x_m)$, donde $\{f(x_1, \dots, x_m) = 0\} = D$.

Esto es generalizable a cubrimientos de Galois abelianos (ver paper de Rita Pardini), lo cual incluye los cubrimientos de Kummer.

Galois no abeliano es más complicado (existen por ejemplo para S_3 y diedrales en general ...)

- $\mathcal{E}$ = localmente libre de rango n en Y.

$S(\mathcal{E})$ = algebra simétrica de $\mathcal{E}$

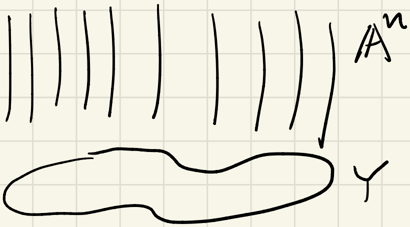
$\Rightarrow$ $\mathcal{A} := S(\mathcal{E})$ es una $\mathcal{O}_Y$-algebra y

$$X := \mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \xrightarrow{f} Y$$

es el <u>vector bundle</u> asociado a $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{U} \subset Y$ es tal que $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus n}$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathbb{A}^n \times \mathcal{U}$. Ver más en Exer. 5.18.



(pero pegados no trivialmente)

Generalización de la construcción Proj

(†) X = esquema Noetheriano.
$\mathcal{S}$ = haz cuasi-coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos tal que

$$\mathcal{S} \simeq \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{S}_d$$

$\mathcal{S}_d$ = parte homogenea gr. d y producto para que sea $\mathcal{O}_X$-álgebra graduada

Asumir: $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{S}_1$ = coherente $\mathcal{O}_X$-módulo y $\mathcal{S}$ localmente generado por $\mathcal{S}_1$ $\mathcal{O}_X$-álgebra

Digamos $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A$ y $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ A-alg graduada

$\Rightarrow$ $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{d\geq 0} S_d) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} \operatorname{Spec}(A)$ $[A \xrightarrow{\varphi} S]$

como antes. Si $f \in A$ y $U_f = \operatorname{Spec}(A_f)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Proj}(S_f) \simeq \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{U}_f)$. [compatiblemente varios Proj]

$\therefore$ para $\mathcal{U}, V \subset X$, $\pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{U}\cap V) \simeq \pi_V^{-1}(\mathcal{U}\cap V)$.

Así se obtiene $\operatorname{Proj}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\pi} X$ tal que para $\mathcal{U} = \operatorname{Spec}(A)$, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es el Proj de antes!

Y los $\mathcal{O}(1)$ locales se pegan para un $\mathcal{O}(1)$ global.

¡Cuidado! $\mathcal{O}(1)$ en Proy no necesita ser muy amplio.

obs).- Tensorizando adecuadamente por $\mathcal{L}$ haz invertible (ie $\mathcal{S}_d \otimes \mathcal{L}^d$), entonces obtenemos un $\mathcal{S}'$ con $(\dagger)$ tal que

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Proy}(\mathcal{S}) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \operatorname{Proy}(\mathcal{S}') \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Prop: (a) $\operatorname{Proy}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\pi} X$ es propio.

(b) Si X tiene un $\mathcal{L}$ amplio $\Rightarrow$ π es proyectivo y $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ será muy amplio en $\operatorname{Proy}(\mathcal{S})$ sobre X, $\forall n > 0$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Proy}(\mathcal{S}) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n \times X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m_A \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \mathbb{P}^N_A . \\ \operatorname{Spec} A & X \arrow[l] & & \end{tikzcd}$$

- Construcción 1: (Fibrados en $\mathbb{P}^n$)

X = esquema Noetheriano
$\mathcal{E}$ = localmente libre rango $n+1$
$\mathcal{S}$ = $S(\mathcal{E})$ álgebra simétrica de $\mathcal{E}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\mathcal{E}) := \operatorname{Proy}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\pi} X$$

es un fibrado no necesariamente trivial de $\mathbb{P}^n$.

Si $\mathcal{E}$ libre en $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^n$.

Prop: Si rango$(\mathcal{E}) \geq 2 \Rightarrow \mathcal{S} \simeq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{O}(l))$.

En particular, $l<0 \Rightarrow \pi_*(\mathcal{O}(l)) = 0$,
$l=0 \Rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}) = \mathcal{O}_X$,
$l=1 \Rightarrow \pi_*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{E}$.

y $\exists\ \pi^*(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0$.

Ej.- $X = \mathbb{P}^1_k$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}\oplus\mathcal{O} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Ej.- $\mathcal{E} = \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1) \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq Bl_p(\mathbb{P}^2_k)$.

[mirar superficies de Hirzebruch]

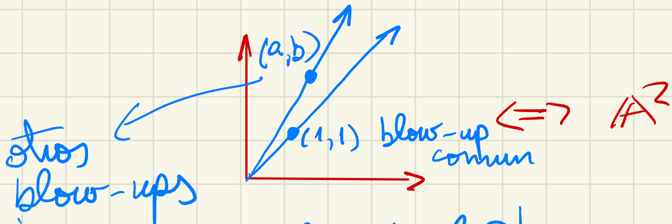
- Construcción 2: Blow-up subesquema cerrado

X = esquema Noetheriano
$\mathcal{I}$ = haz coherente de ideales en X
$\mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{I}^d$, $\mathcal{I}^d$ ideal a la d, $\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$

$$\Rightarrow \quad \tilde{X} := \mathrm{Proy}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\pi} X$$

es el blow-up con respecto al subesquema cerrado Y correspondiente a $\mathcal{I}$ (o con centro en Y)

Ej.- Para $(0,0)$ en $\mathbb{A}^2$ se recupera $Bl_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$ con (x,y). Pero (mirar tóricamente por ejemplo) podemos hacer muchos blow-ups (y muy necesarios e interesantes (e.g. resolución de singularidades) a través de otros rayos:



¿Quién es el ideal?!

Hacer los cálculos para hacer coincidir lo que ya sabes!

__Prop__: En general, $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ blow-up de $\mathcal{I}$, entonces:

(a) $\tilde{\mathcal{I}} = \pi^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ es un haz invertible en $\tilde{X}$. ← transf. estricta

(b) Si $Y \subset X$ es el centro y $\mathcal{U} = X \setminus Y$
$\Rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$.

(c) Satisface propiedad universal (Prop. 7.14) en relación a imagen inversa de ideal $\rightsquigarrow$ haz invertible.

(d) X variedad $|_k$ $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ variedad $|_k$ y

- π biracional, propia, sobre
- X cuasi-proy (proy) $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ casi-proy (proy) y π morfismo proyectivo.

(e) resuelve indeterminaciones! (Example 7.17.3)