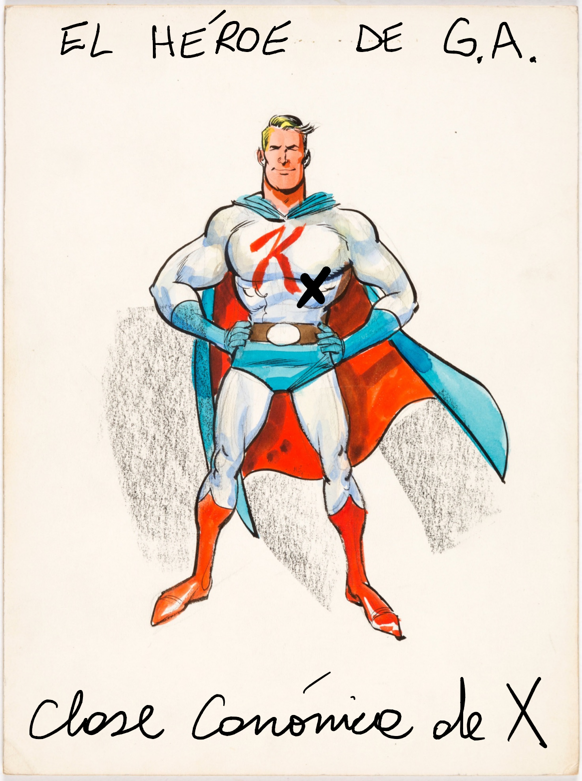


Imaged by Heritage Auctions, HA.com

ga 18

28/10/21

diferenciales

§8. Diferenciales.

A anillo, B A-álgebra, M B-módulo.

$\boxed{\text{Def}}$.- Una <u>A-derivación</u> de B sobre M es una función $d: B \to M$ tal que:

(1) d es aditivo

(2) $d(bb') = b\,d(b') + b'\,d(b)$

(3) $da = 0 \quad \forall a \in A$.

Ej.- $k[x] \xrightarrow{d} k[x] \qquad d(p(x)) := \dfrac{\partial p}{\partial x}$ es una k-derivación.

$\boxed{\text{Def}}$.- El <u>módulo de formas diferenciales relativas</u> de B sobre A es un B-módulo

$$\Omega_{B|A}$$

junto con una A-derivación $d: B \to \Omega_{B|A}$ la cual satisface la propiedad universal:
$\forall$ B-módulo M y $\forall A$-derivación $d': B \to M$ existe un único homomorfismo de B-módulos $f: \Omega_{B|A} \to M$ con

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & \Omega_{B|A} \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

En efecto, se puede probar que

$$\Omega_{B|A} = \frac{B\text{-módulo libre gen. por } db,\ b \in B}{\langle d(b+b') - db - db',\ d(bb') - bd(b') - b'd(b),\ da \rangle}$$

y $d: B \to \Omega_{B|A}$, $b \mapsto db$.

Ejl.- $B = k[x]$, $A = k$ $\Rightarrow$ $\Omega_{B|A} = \dfrac{\langle d(p(x)) : p(x) \in k[x] \rangle}{\text{relaciones}}$

$d(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$ se calcula con $dx^n = n x^{n-1} dx$.

$\Rightarrow$ como $k[x]$-módulo , $\Omega_{k[x]|k} = k[x] \cdot dx$.

En efecto, $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]|k}$ es libre generado por $dx_1, \dots, dx_n$

Ejl.- $B = k[x,y]/(xy)$ $\Rightarrow$ $\Omega_{B|k} = \langle dx, dy \rangle / \langle y\,dx + x\,dy \rangle$.

Una mirada hacia diferenciales para esquemas

Prop: Sea $B \otimes_A B \xrightarrow{f} B$, $f(b \otimes b') = bb'$ (morfismo diagonal)
Sea $I := \ker(f)$.
Considerar $B \otimes_A B$ como B-módulo con mult. por la izq.
$\Rightarrow$ I/I^2 es un B-módulo.

Definir $d : B \longrightarrow I/I^2$, $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$.

Entonces $\underbrace{I/I^2 , d \text{ es } \simeq \text{ a } \Omega_{B|A} , d}_{}$.

es un super truco algebraico
que necesita mod I^2 para las relaciones...

- B A-álgebra y $S \subset B$ sistema multiplicativo $\Rightarrow$ $\Omega_{S^{-1}B|A} \simeq S^{-1}\Omega_{B|A}$.
- Si B es f.g. A-álgebra o B es localización de f.g. A-álgebra $\Rightarrow$ $\Omega_{B|A}$ es f.g. B-módulo.

Prop: B = anillo local $\supset k \simeq B/\mathfrak{m}$. Entonces

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B|k} \otimes_B k \quad , \quad b \mapsto db \otimes 1$$

es un isomorfismo de B-módulos.

Si asumimos además $k = \bar{k}$ y B = localización de f.g. k-álgebra. Entonces,

$$\Omega_{B|k} \text{ es un } B\text{-módulo libre de rango} = \dim B \iff B \text{ es regular}$$

$\boxed{\text{Def}}$.- $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo de esquemas. Considerar el morfismo diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$.

Luego $X \longrightarrow \Delta(X)$ = subesquema cerrado de un abierto W de $X \times_Y X$

Sea $\mathcal{I}$ = haz de ideales de $\Delta(X)$ en W, entonces se define

$$\Omega_{X|Y} := \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

haz de diferenciales relativas de $X|_Y$.

¿Qué es esto? $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A \subset Y$ y $V = \operatorname{Spec} B \subset X$ con $f(V) \subseteq \mathcal{U}$.

Entonces $V \times_{\mathcal{U}} V \subset X \times_Y X$ abierto afín $\simeq \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$

y $\Delta(X) \cap V \times_{\mathcal{U}} V$ está definido por $\ker(B \otimes_A B \to B)$.

Así el haz asociado a $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ es $I/I^2 \Rightarrow \Omega_{V|\mathcal{U}} \simeq \widetilde{\Omega_{B|A}}$.

Las derivaciones $d : B \to \Omega_{B|A}$ se pegan para formar $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X|Y}$ morfismo de haces de grupos abelianos.

$\therefore$ $\Omega_{X|Y}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo cuasi-coherente.

Ejl.- $X = \mathbb{A}^n_Y$, $\Omega_{X|Y}$ es libre rango n generado por secciones globales $dx_1, \ldots, dx_n$.

Teorema: (Sucesión de Euler) A = anillo, $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.
Entonces existe sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 .$$

"Dem": • $S := A[x_0, \dots, x_n]$, $E := S(-1)^{\oplus n+1}$ S-mód. graduado con base $e_0, \dots, e_n$ en grado 1.

$$\begin{array}{cccccc} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & 0 & 0 & k & \text{lineal} & \end{array}$$

• Definir $E \longrightarrow S$, $e_i \mapsto x_i$ y M = kernel.

• Luego usando la localización en afines, tenemos
$$0 \to \tilde{M} \to \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

• Ahora, $E_{x_i} \to S_{x_i}$ es sobre entre S_{x_i}-módulos libres
$\Rightarrow M_{x_i}$ es libre rango n generado por

$$\left\{ e_j - \left(\frac{x_j}{x_i}\right) e_i \ : \ j \neq i \right\}$$

• Luego en $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\}$, $\tilde{M}|_{\mathcal{U}_i}$ libre generado por

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{x_i} e_j - \frac{x_j}{x_i^2} e_i}_{\text{grado } 0} \ : \ j \neq i \right\}$$

$$\therefore \quad \Omega_{X|Y}\big|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\varphi_i} \tilde{M}\big|_{\mathcal{U}_i} \qquad \varphi_i\left(d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\right) = \frac{1}{x_i^2}(x_i e_j - x_j e_i)$$

es isomorfismo y se pegarán bien! ∎

Ejl.- $X = \mathbb{P}^1_k$ en $\mathcal{U}_1$ tenemos dx y en $\mathcal{U}_2$ tenemos dy.

En $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ tenemos $\dfrac{k[x]\,dx}{x^n}$, $dx = d\left(\frac{1}{y}\right) = \dfrac{-dy}{y^2}$.

X: $\{ZY^2 = X^3 + AXZ^2 + BZ^3\}$ suave. $\Gamma(\Omega^1_{X|k}) = 0$?

no, tiene dim 1.

si $s \in \Gamma(X, \Omega^1_{\mathbb{P}^1_k}) \Rightarrow s|_{U_1} = p(x)\,dx$, $s|_{U_2} = q(y)\,dy$

pero no se puede! $\Rightarrow \Gamma(X, \Omega^1_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$.

Similar para $\mathbb{P}^n_k$ (o usar Teorema!).

$\leadsto X_d \subset \mathbb{P}^2_k$ no sing $\Rightarrow \Gamma(\Omega^1_{X_d|k})$ de dim género de la curva

$k = \mathbb{C}$:  # hoyos = género

Variedades no singulares

Def.- Una variedad abstracta X sobre $k = \bar{k}$ (integral, separable, tipo finito sobre Spec k) es nosingular si todos sus anillos locales son regulares.

[equivale a lo que teníamos con var. cuasi-proyectivas ya que $\mathcal{O}_p \simeq (\mathcal{O}_{\mathfrak{m}})_p$ y localización de reg es reg]

Theorem 8.15: $\Omega_{X|k}$ es un $\mathcal{O}_X$-mod localmente libre de rango $n = \dim X$ $\iff$ X es nosingular

obs: Para $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ variedad completa nosingular, $\Omega_{X|k}$ es haz coherente, entonces $\Gamma(X, \Omega_{X|k})$ es k-espacio vectorial dim finito.

Se cumple $\Lambda^r \Omega_{X|k} =: \Omega^r_{X|k}$ son otros haces localmente libres de rango $\binom{n}{r}$:

$$h^{r,0} := \dim_k \Gamma(X, \Lambda^r \Omega_{X|k})$$

son los números de Hodge (dim de las r-formas diferenciales regulares de X).

[no son sólo invariantes birregulares sino biracionales]

Cuando $r = n \Rightarrow \Omega^n_{X|k}$ es haz invertible

$$\Rightarrow \boxed{\Omega^n_{X|k} \simeq \mathcal{O}_X(K_X)}$$

clase canónica $= [\mathcal{O}_X(K_X)] \in \operatorname{Pic}(X)$

donde K_X es divisor canónico.

Género geométrico $p_g(X) := h^{n,0}$.

Ejl.- X = curva $\Rightarrow$ sólo $r = 1 = n$

$\Rightarrow p_g(X) = \dim_k \Gamma(X, \Omega^1_{X|k}) = g(X)$

el género de X.

Ejl.- X = superficie $\Rightarrow r = 1, 2$

$h^{1,0}$ = "irregularidad" y p_g. [Tendremos $K_X \cdot K_X$]

Cor 8.16: X variedad sobre $k = \bar{k}$. Entonces existe $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso nosingular.

Dem: (Esto ya lo sabemos)

- $n = \dim X \Rightarrow K(X)|_k$ tiene grado trans. n y es extensión f.g. $\Rightarrow$ existen elementos $x_1, \dots, x_n$ transcendentales tal que

$$k \subset k(x_1, \dots, x_n) \subset K(X)$$

finita separable

y luego $\dim_{K(X)} \Omega_{K(X)|k} = \dim X = n$ (Tm 8.6A).

- $\Omega_{K(X)|k} = (\Omega_{X|k})_{\xi}$ donde ξ es punto genérico.
- En general, si al localizar un $\mathcal{O}_X$-módulo en algún punto nos da libre $\Rightarrow$ lo es en un abierto $\mathcal{U} \ni \xi$.
- Así $\exists\, \mathcal{U} \ni \xi$ donde $\Omega_{X|k}|_{\mathcal{U}}$ es libre

  y así por Teorema $\mathcal{U}$ es nosingular ■

<u>Teorema:</u>

$$\begin{array}{l} X = \text{variedad nosingular } |_{k=\bar{k}} \\ \cup\!| \\ Y = \text{subesquema cerrado irred} \\ \quad\ \text{con haz de ideales } \mathcal{I} \end{array}$$

Entonces:

Y no singular $\Longleftrightarrow$ (1) $\Omega_{Y|k}$ localmente libre y
(2) $0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{b \mapsto db \otimes 1} \Omega_{X|k} \otimes \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\text{restr.}} \Omega_{Y|k} \to 0$ es exacto.

Si sucede, entonces $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ es localmente libre de rango $r = \operatorname{codim}(Y, X)$ en Y.

$\boxed{\text{Def.}}$- X variedad nosing $|_{k=\bar{k}}$

(1) Haz tangente $\mathcal{T}_X := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X|k}, \mathcal{O}_X)$
(loc. libre de rango n)

(2) Haz canónico $\omega_X := \Lambda^n \Omega_{X|k} \simeq \mathcal{O}_X($  $)$

$\boxed{\text{Def}}$.- $Y \subseteq X$ var. no singulares $|_{k=\bar{k}}$

(1) Hoz conormal de Y en X $\quad \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$

(2) Hoz normal de Y en X $\quad \mathcal{N}_{Y|X} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$

Como todo es loc. libre, tomando $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\ \ , \mathcal{O}_Y)$ tenemos:

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{N}_{Y|X} \to 0$$

exacta.

Además, haciendo cuña $r = \operatorname{codim}(Y)$ veces en

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{X|k} \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega_{Y|k} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \simeq \omega_Y \otimes \Lambda^r(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \otimes \Lambda^r \mathcal{N}_{Y|X}$$

Si $r = 1 \Rightarrow Y$ divisor $\Rightarrow \mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_X(-Y)$

y $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathcal{O}_X(-Y) \otimes \mathcal{O}_Y$

$[\, 0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathcal{I}^2 \to \mathcal{I} \to \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_Y \to 0 \,]$

y así $\mathcal{N}_{Y|X} \simeq \mathcal{O}_X(Y) \otimes \mathcal{O}_Y$

$$\therefore \quad \boxed{\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(Y)|_Y} \quad \text{ADJUNCIÓN}$$

Thm 8.18 (Bertini): $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ var. proy. nosing. $\big|_{k=\bar{k}}$

Entonces $\exists H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ hiperplano con $H \not\supseteq X$ tal que $H \cap X$ es regular en todo punto.

[En efecto, $H \cap X$ es conexo (veremos $\dim \geq 2$) y así irreducible, y así es var. proy. no singular]

Además los hiperplanos H donde eso pasa forman un abierto denso de $|H|$.

Dem: Recomiendo ver Hartshorne, dem. es conteo de dimensiones

- $B_x = \{$ hiperplanos H / $H \supseteq X$ o $H \not\supseteq X$ pero $x \in H \cap X$ y no es reg. en $H \cap X \}$

$\Rightarrow B_x$ es sist. lineal de dim $n-r-1$. ($r = \dim X$)

- Luego variedad de incidencia

$\boxed{\text{Truco para mostrar que cúbica} \subseteq \mathbb{P}^3 \text{ tiene rectas}}$ 

$$B = \{ \langle x, H \rangle \ / \ x \in X \text{ cerrado y } H \in B_x \} \xrightarrow{p_1} X$$

p_1 es sobre con $\langle x, o \rangle$ y fibra dim $n-r-1$.

- Como fibras son $\mathbb{P}^{n-r-1}$ y X irred $\Rightarrow B$ es irred (Sha I p. 77) y tiene dim $n-r-1+r = n-1$.

- Luego $p_2 : B \to |H|$ y $\dim p_2(B) \leq n-1$. Como $\dim |H| = n \Rightarrow p_2(B) \not\subseteq |H|$. Como X proyectivo $\Rightarrow X \times |H| \xrightarrow{p_2} |H|$ propio, B cerrado $\Rightarrow p_2(B)$ cerrado propio de $|H|$ $\Rightarrow \mathcal{U} = |H| \setminus p_2(B)$ denso ∎

obs: Resulta con X finitas singularidades.

obs: Si X = curva $\Rightarrow$ plano general intersecta transversalmente en todos los puntos y $\# = \mathrm{gr}(X)$.

Irreducible: El esquema $X \cap H$ está definido por

Y conj. alg proy conexidad Y? $H^0(\mathcal{O}_Y) \simeq k$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-H) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X\cap H} \to 0$$

y $H^1(X, \mathcal{O}_X(-H)) = 0$ si $k = \mathbb{C}$ y $\dim X \geq 2$ (Kodaira vanishing) $\Rightarrow$ siempre es conexo.

[Se hecho cierto para $k = \bar{k}$: $H^1(\mathcal{O}_X(-dH)) = 0$
$d >> 0$, X = normal proy dim ≥ 2]

obs.- ¡Intersecciones completas no singulares existen!

Para terminar varios ejemplos:

Ejl.- $X = \mathbb{P}^n_k$, dualizar Euler (generalizar esto!)

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{T}_X \to 0.$$

Notar que tomando cuña de la sucesión Euler:

$\omega_{\mathbb{P}^n_k} \simeq \mathcal{O}_X(-n-1)$ (y así $p_g(\mathbb{P}^n_k) = 0$).

Thm 8.19 : X, X' var. proy. nosing $|_{k=\bar{k}}$ biracionalmente equivalentes

$$\Rightarrow \quad P_g(X) = P_g(X').$$

[Así toda variedad racional tiene $P_g(X) = 0$ para curvas será ssi.]

Ej 1.- (hipersuperficies no singulares)

$X = \mathbb{P}^n_k$ $n \geq 2$, $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$ incrustación Veronese grado $d \geq 1$. $H \subset \mathbb{P}^N_k$ hiperplano. Por Bertini, hay un abierto Zariski de H tal que

$$Y = X \cap H \quad \text{es regular.}$$

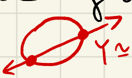
Si Y tiene al menos dos componentes Y_1, Y_2, entonces en $\mathbb{P}^n_k$ tenemos intersección no vacía de 2 hipersuperficies $(n \geq 2)$ y en esos puntos Y sería singular.

$\therefore$ Y es irreducible y nosingular, y por adjunción

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-n-1).$$

$n=2$, $d=1$: Y es recta en $\mathbb{P}^2_k$, $Y \simeq \mathbb{P}^1_k$, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2)$

$n=2$, $d=2$: Cónica y $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-1) \Rightarrow \omega_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$.

$\mathbb{P}^2 \supseteq$  $Y \simeq \mathbb{P}^1$ $\quad \omega_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)|_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$

$n=2$, $d=3$: cúbica suave y $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$
$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)\big|_Y = \mathcal{O}_Y$

$\Rightarrow p_g(Y) = \dim_k \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = 1$: NO es racional

$n=2$, $d \geq 4$: $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-3)$, $d-3>0$. Luego $p_g(Y) > 0$. grado$(\omega_Y) = d(d-3)$

Bajo isomorfismo, se produce un isomorfismo entre $\Omega_{X|k}$ y así la clase canónica es invariante. Luego para curvas el grado de esta clase es invariante y así para curvas planas cada $d \geq 3$ produce curvas no birregulares (ni biracionales) entre sí.

$n=3$, $d=1$: $Y = \mathbb{P}^2$ y $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-3)$.

$n=3$, $d=2$: $Y =$ cuádrica nosing, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-2)$
$\Rightarrow p_g = 0$.

$n=3$, $d=3$: $Y =$ cúbica tiene $p_g = 0$, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-1)$

$n=3$, $d=4$: $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ y $p_g = 1$. Esta superficie pertenece a la clase K3.

$n=3$, $d \geq 5$: $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-4)$, $p_g > 0$, Y no es racional. Aquí el haz canónico es muy amplio : Superficies de tipo general.

$n=4$, $d=3,4$: $p_g = 0$ pero NO son racionales

Clemens-Griffiths Iskovskih-Manin

n arbitrario, $d \geq n+1$: $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d-n-1)$, $d-n-1 \geq 0$
$\Rightarrow$ $p_g(Y) \geq 1$ y así no racional.

$$\left[\begin{array}{l} 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_Y \to 0 \\ 0 \to \Gamma(\underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)}_{0}) \to \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)) \to \Gamma(\mathcal{O}_Y(d-n-1)) \to \cdots \end{array}\right]$$

- Pronto tendremos más invariantes a través de la cohomología.

- La sección diferenciales en Hartshorne termina con varios asuntos de álgebra local (eg Cohen-Macaulay) que quedan para ustedes (eg Criterio normalidad de Serre).

- Un subesquema cerrado $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ se llama intersección completa si $I(Y) \subset S = k[x_0, .., x_n]$ está generado por $r = \operatorname{codim}(Y, \mathbb{P}^n_k)$ polinomios homogeneos.

  Luego, si Y es nosingular (Bertini!), tenemos
$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(\sum d_i - n - 1)$$

- Se puede calcular $p_g(Y_d) = \binom{d-1}{n} = p_a(Y_d)$

  hipersuperficie

  género aritmético tarea antigua

  curva plana, $p_g(Y_d) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$

  superficie en $\mathbb{P}^3$, $p_g(Y_d) = \dfrac{(d-1)(d-2)(d-3)}{6}$

- curva en $\mathbb{P}^3$ intersección compl, $p_g(Y) = \frac{1}{2} de(d+e-4)+1$.