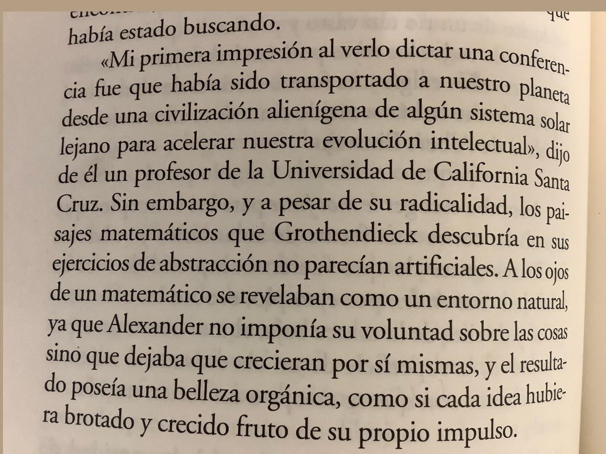
$$H^r(X, \mathcal{F})$$



había estado buscando.

«Mi primera impresión al verlo dictar una conferencia fue que había sido transportado a nuestro planeta desde una civilización alienígena de algún sistema solar lejano para acelerar nuestra evolución intelectual», dijo de él un profesor de la Universidad de California Santa Cruz. Sin embargo, y a pesar de su radicalidad, los paisajes matemáticos que Grothendieck descubría en sus ejercicios de abstracción no parecían artificiales. A los ojos de un matemático se revelaban como un entorno natural, ya que Alexander no imponía su voluntad sobre las cosas sino que dejaba que crecieran por sí mismas, y el resultado poseía una belleza orgánica, como si cada idea hubiera brotado y crecido fruto de su propio impulso.

ga19

2/Nov/2021

cohomología a la Grothendieck

Extracto p. 84 «Un verdor terrible» Benjamín Labatut

Esto será cohomología de haces de grupos abelianos en un espacio topológico (general), y luego para haces cuasi-coherentes en esquemas noetherianos.

§1. Varias cosas básicas previas.

A = anillo conmutativo con 1 como siempre.
$\mathrm{Mod}(A)$ = Categoría de A-módulos, morfismos A-lineales.

Ejl.- $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ = Categoría de grupos abelianos $=: \mathcal{Ab}$
$\mathrm{Mod}(k)$ = Categoría de espacios vect$/_k$ $=: \mathrm{Vect}_k$
(k=cuerpo)

$\boxed{\text{Def}}$.- (1) un <u>complejo de cocadenas</u> de A-módulos es

$$\mathcal{C}^\bullet : \quad \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} C^i \xrightarrow{d_i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots \qquad d_{i+1}\circ d_i = 0 \quad \forall i$$

(2) La <u>i-ésima cohomología</u> de $\mathcal{C}^\bullet$ es

$$H^i(\mathcal{C}^\bullet) := \ker(d_{i+1}) / \mathrm{Im}(d_i)$$

(3) $\mathcal{C}^\bullet$ es una <u>sucesión exacta</u> si $\ker d_{i+1} = \mathrm{Im}\, d_i$, $\forall i$. Una <u>sucesión exacta corta</u> es $0 \to M \to N \to P \to 0$.

obs).- En la vida también hay complejos de cadenas y homología!

Algunas cosas útiles de álgebra homológica basados en "Perseguir el diagrama".

(5 Lemma)

<u>Lema de los 5 cosas</u>: Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \overbrace{M \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & R \arrow[d, "e"']}^{\text{exacta}} \\ \underbrace{M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & R'}_{\text{exacta}} \end{tikzcd}$$

b, d isom. $\Rightarrow$ c es isom.
a sobre
e 1-1

[Común usarlo con $M=R=M'=R'=0$]

<u>Lema de la $\mathcal{S}$</u>: Dado el diagrama conmutativo

exacta

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 & \end{tikzcd}$$

a' a b'' b' 0

exacta

Entonces tenemos sucesión exacta

$$\ker f_1 \to \ker f_2 \to \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f_1 \to \operatorname{coker} f_2 \to \operatorname{coker} f_3 .$$

[aquí todos los morfismos son inducidos del diagrama excepto el morfismo "conector" δ]

$\boxed{\text{Def}}$.- Dados dos complejos de cocadenas C°, D° un <u>morfismo</u> $f: C^\circ \to D^\circ$ es una colección conmutativa de $C^i \to D^i$.

$\therefore \quad f : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{D}^\circ \implies H^i(\mathcal{C}^\circ) \to H^i(\mathcal{D}^\circ).$

$$\left[\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C^i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D^{i-1} \arrow[r] & D^i \arrow[r] & D^{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \quad \text{y perseguir diagrama!}\right]$$

Lema sucesión larga exacta en cohomología:

Dada $0 \to \mathcal{B}^\circ \to \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{D}^\circ \to 0$ exacta corta de complejos de cocadenas, entonces se induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^i(\mathcal{B}^\circ) \to H^i(\mathcal{C}^\circ) \to H^i(\mathcal{D}^\circ) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(\mathcal{B}^\circ) \to \cdots$$

Dem: Se usa el lema de la serpiente que en efecto es equivalente al lema de la sucesión larga exacta en cohomología:

Por un lado, de $0 \to B^\circ \to \mathcal{C}^\circ \to D^\circ \to 0$ sacar

$$\begin{tikzcd} B^i/\mathrm{Im}\, f^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^i/\mathrm{Im}\, g^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & D^i/\mathrm{Im}\, h^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker f_{i+1} \arrow[r] & \ker g_{i+1} \arrow[r] & \ker h_{i+1} \end{tikzcd}$$

y usar lema de la serpiente. Por otro lado,

si
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r, "b"] & Y_3 \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X_1/\ker a \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, b \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

y luego aplicar lema suc. exacta larga ∎

Dado $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, tendremos una resolución de $\mathcal{F}$ por haces "inyectivos":

$$0 \to \mathcal{F} \to I^0 \xrightarrow{f_0} I^1 \xrightarrow{f_1} \cdots$$

, es decir, una cocadena exacta.

Luego tomamos secciones globales $\Gamma(X, \_)$ a $I^\bullet$:

$$0 \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \Gamma(X, I^2) \to \Gamma(X, I^3) \to \cdots$$

(la cual puede no ser exacta) y de aquí tomamos cohomología:

$$H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, I^\bullet)).$$

<u>obs</u>: Notar que $0 \to \mathcal{F} \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ exacta

$\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1)$ exacta

$$\therefore \underset{\substack{\| \\ H^0(X, \mathcal{F})}}{\ker(\Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1))} = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

PERO podrían haber muchas resoluciones inyectivas para $\mathcal{F}$, ¿Porqué está bien definida la $H^i(X, \mathcal{F})$?

Esto es <u>homotopía</u> y va ligado con <u>objetos inyectivos</u>.

[De hecho el problema más bien pasará por la existencia: «Categoría tiene suficientes inyectivos».]

Def.-

(1) Dados dos morfismos $f, g : A_e^\circ \to B^\circ$, se dice que son <u>homotópicos</u> ($f \sim g$) si existe colección de morfismos $k^i : A^i \to B^{i-1}$ $\forall i$ tal que

$$f - g = dk + kd$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & A^i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "k^i"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "k^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r] & B^i \arrow[r] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

[los d son los morfismos de cocadenas]

(2) A_e°, B° son <u>homotópicamente</u> <u>equivalentes</u> si $\exists f : A_e^\circ \to B^\circ$ y $g : B^\circ \to A_e^\circ$ tal que

$$f \circ g \sim 1_{B^\circ} \qquad g \circ f \sim 1_{A_e^\circ} .$$

<u>obs</u>: Si $f \sim g \Rightarrow$ morfismo entre cohomologías es el mismo [pura definición]. Si $A_e^\circ \sim B^\circ$ $\Rightarrow$ las cohomologías son isomorfas.

Def.- Un $I \in Mod(A)$ es <u>inyectivo</u> si $\forall C \xrightarrow{f} I$ y $\forall C \overset{g}{\hookrightarrow} B$, $\exists B \xrightarrow{h} I$ tal que $h \circ g = f$.
(no único)

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, hook, "g"'] & I \\
& B \arrow[u, dashed, "\exists h"']
\end{tikzcd}$$

[$\underset{\text{cat. abel}}{\Longleftrightarrow}$ Hom(__ , I) es exacto]

Notar que entonces dos resoluciones inyectivas son así homotópicas y la functorialidad de $\Gamma(X, —)$ produce isomorfismos en cohomología...

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & J_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Por la inyectividad, tenemos $\downarrow$ ya que

$$
\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "f_1"'] & I_1/M \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & I_2 \arrow[d, dashed] \\
& J_1 \arrow[r] & J_2
\end{tikzcd}
$$

$\exists$ ya que es inyectivo

existe ya que ambos exactos
($M \mapsto 0$ en J_2)

$$
\therefore \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"', shift right] \arrow[d, "1", shift left] \arrow[dl, "0"'] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"', shift right] \arrow[d, "1", shift left] \arrow[dl, "k_1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

g_i son las composiciones

k_1 sale de la inyectividad de I_1 (indep. de g_1!)

Queremos $1 - g_1 = d\underbrace{\cancel{k_0}}_{0} + k_1 d$

$$
\therefore \text{ usar } \quad
\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "1 - g_1 - d\underbrace{\cancel{k_0}}_{0}"'] & I_1/M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\exists"] & I_2 \arrow[dl, dashed] \\
& I_1 &
\end{tikzcd}
$$

$\exists k_1$ por inyectividad

Si $m \in M \Rightarrow 1 - g_1(m) = m - g_1(m) = m - m = 0$

etc ...

Hacer esto para haces es copiar y pegar lo hecho para A-modulos ...

Una <u>Categoría Abeliana</u> $\mathscr{C}$ es una categoría que se comporta como $\mathcal{Ab}$ = Cat. grupos abelianos.

[En efecto al final $\mathscr{C}$ es subcategoría de $\mathcal{Ab}$. Y eso dice que teoremas generales que se demostraron en $\mathcal{Ab}$ son igualmente válidos en $\mathscr{C}$, y el punto es que en $\mathcal{Ab}$ se usaron elementos persiguiendo el diagrama!]

$\mathcal{Ab}(X)$:= haces de grupos abelianos sobre X = esp. top.

$\mathrm{Mod}(X)$:= haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$.

$\mathrm{Qco}(X)$:= haces cuasi-coherentes en un esquema X.

$\mathrm{Coh}(X)$:= haces coherentes en un esquema X.

Tenemos functor exacto izquierdo $\Gamma : \mathcal{Ab}(X) \to \mathcal{Ab}$

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \text{secciones globales de } \mathcal{F}$$

Def.- Un functor covariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos categorías abelianas es <u>aditivo</u> si $\forall\, A, A' \in \mathcal{A}$ el morfismo inducido

$$\mathrm{Hom}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(A'))$$

es homomorfismo de grupos abelianos.

[$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A' \Rightarrow F(A) \underset{Fg}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} F(A')$ $\Gamma(X, \_\_)$ ok

$\Downarrow$ $A \xrightarrow{f+g} A' \Rightarrow$ aditivo es $F(f+g) = F(f) + F(g)$]

F es <u>functor exacto izquierdo</u> si es aditivo y

$$\underset{\text{exacta}}{0 \to A \to A' \to A'' \to 0} \Rightarrow \underset{\text{exacta}}{0 \to F(A) \to F(A') \to F(A'')}$$

[exacto derecho $\Rightarrow$ 0 a la derecha]

[exacto $\Rightarrow$ ambos cero]

[contravariante lo análogo:

exacto izq: aditivo y $0 \to A \to A' \to A'' \to 0 \Rightarrow 0 \to F(A'') \to F(A') \to F(A)$

etc ...]

Ejl.- $\mathcal{C}$ cat. abeliana y $A \in \mathcal{C}$, entonces:

$\mathrm{Hom}(A, \_\_)$ es covariante exacto izquierdo

$\mathrm{Hom}(\_\_, A)$ es contravariante exacto izquierdo.

Def.- $\mathcal{A}$ cat. abeliana con suficientes inyectivos ($\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists\ 0 \to A \to \mathcal{I}^{\circ}$ resolución exacta por inyectivos). Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ functor covariante exacto izquierdo. Un functor derivado derecho de F es: Dado $A \in \mathcal{A}$ y $0 \to A \to \mathcal{I}^{\circ} \Rightarrow R^i F(A) := H^i(F(\mathcal{I}^{\circ}))$.