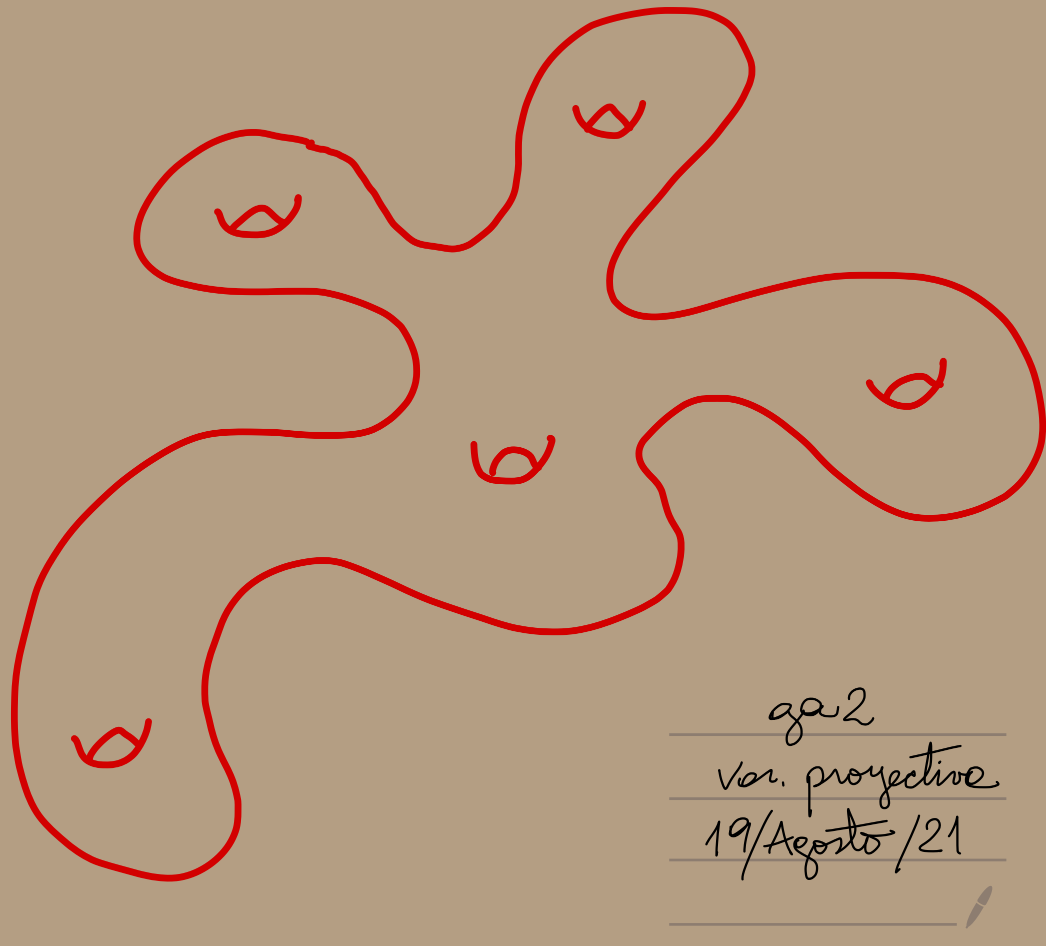


ga2

var. proyectiva

19/Agosto/21

§2. Variedades proyectivas.

Sea k un cuerpo.

$$\mathbb{P}^n_k := k^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \Big/ \vec{v} \sim \vec{w} \text{ ssi } \exists \lambda \in k^*,\ \vec{v} = \lambda \vec{w}$$

$\cup$

$[x_0, x_1, \dots, x_n]$: $x_i \in k$, no todos son cero.

Dentro de $\mathbb{P}^n_k$, queremos conj. algebraicos: usamos polinomios homogeneos, es decir,

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

$$\therefore \quad Z(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{homog.}}}{F}) = \{ p \in \mathbb{P}^n_k : F(p) = 0 \} \quad (\text{hipersuperficie})$$

<u>Def.</u>- un conj. alg. es una intersección arbitraria de hipersuperficies, ie,

$$\underset{\underset{\bigoplus_{d \geq 0} S_d \,=\, S}{\shortparallel}}{T \subseteq k[x_0, \dots, x_n]} \text{ de pol. homog. tal que}$$

$$Z = Z(f, f \in T) = \{ p \in \mathbb{P}^n_k : f(p) = 0,\ f \in T \}$$

<u>Prop</u>: Conj. alg. son los cerrados de una topología en $\mathbb{P}^n_k$: Topología de Zariski.

$\therefore \quad I = \underbrace{\langle T \rangle}_{\text{ideal homogéneo}} \implies Z = Z(I)$

ideal homogéneo $\iff I = \bigoplus_{d \geq 0} I \cap S_d$.

obs.- $Z(x+y^2) \subseteq \mathbb{P}^2_k$.

$$\begin{gathered} Z(x+y^2) \\ \parallel \\ Z(X, Y^2) \end{gathered}$$

Def.- Variedad proyectiva es un conj. alg. irreducible de $\mathbb{P}^n_k$ con la topología inducida. Un abierto de una variedad proyectiva se llama variedad cuasi-proyectiva con la top. inducida

- Y conj. alg. de $\mathbb{P}^n_k$

$\implies I(Y) = \langle f \text{ pol. homog. } f(p) = 0 \ \forall p \in Y \rangle$

y el anillo de coord. homog de Y es

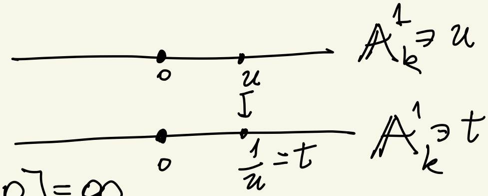
$$S(Y) := k[x_0, \dots, x_n] / I(Y)$$

Y es variedad $\iff I(Y)$ es primo.

- ¿Cómo visualizar $\mathbb{P}^n_k$?

Resp. A través de sus cartas afines.

$$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1_k \cup \mathbb{A}^1_k$$



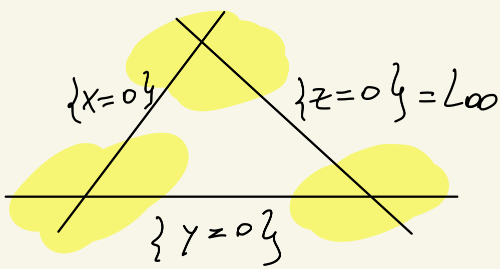
$\rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$}$

$[x_0, x_1]$ $[0,1] = 0, \ [1,0] = \infty$

$$\mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \cup \mathbb{A}^2_k \cup \mathbb{A}^2_k$$

$\rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$}$

$[x,y,z]$



$\mathcal{U}_z = \{z \neq 0\} = \mathbb{A}^2_k$

Si $\{x+y+z=0\} = L \subset \mathbb{P}^2_k$

$\{x+y+1=0\}$ $\{x+1+y=0\}$ $\{1+y+z=0\}$

$$\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}^n_k$$

(i) $\mathcal{U}_i := \mathbb{P}^n_k \setminus H_i$, $H_i = \{x_i = 0\}$

(ii) $\varphi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$

$$\varphi_i[x_0, \dots, x_n] = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$ posición i se ignora

(iii) φ_i es un homeomorfismo.

- φ_i es biyectivo.
- cerrados de $\mathcal{U}_i$ = cerrados de $\mathbb{A}^n_k$
- Fijar $i=0$:

$$S^h = \begin{array}{c}\text{Conj polinomios}\\ \text{homogeneos en}\\ k[x_0,\dots,x_n]\end{array} \underset{\beta \,=\, \text{homog.}}{\overset{\alpha \,=\, \text{deshomog.}}{\rightleftarrows}} k[x_1,\dots,x_n]$$

$$\alpha(F(x_0,\dots,x_n)) = F(1,x_1,\dots,x_n)$$

$$\beta(\underbrace{g}_{\text{grado } e}) = x_0^e\, g\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)$$

- $Y \subset \mathcal{U}_0$ cerrado, $\overline{Y} \subset \mathbb{P}^n_k$, $\overline{Y} = Z(\underset{\text{pol. hom.}}{T})$

$\exists T \subset S^h$. Sea $T' = \alpha(T)$

$\therefore\ \varphi(Y) \underset{\text{Tarea}}{=} Z(T')$ ie cerrado.

- Si $W \subset \mathbb{A}^n_k$ cerrado, $W = Z(T')$

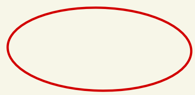
$T' \subset k[x_1,\dots,x_n]$ $\varphi^{-1}(W) \underset{\text{Tarea}}{=} Z(\beta(T')) \cap \mathcal{U}_0$.

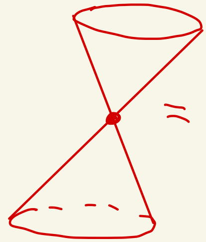
Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Ideales homog.}\\ \text{en } k[x_0,\dots,x_n]\end{array}\right\} \underset{I}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{Conj. alg.}\\ \text{en } \mathbb{P}^n_k\end{array}\right\}$$

$k=\bar{k}$ ¿Cuál es el Nullstellensatz en este formato?

Ejl.- $V = Z(x^2+y^2-z^2) \subseteq \mathbb{P}^2$ o $Z(x^2+y^2-z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$

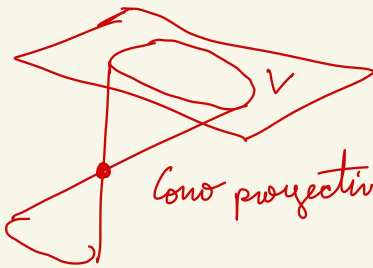




$= C(V)$

cono afín

o $Z(x^2+y^2-z^2) \subseteq \mathbb{P}^3_{x,y,z,w}$



Def.- $C(V) := \{(x_0,\dots,x_n)\in \mathbb{A}^{n+1}_k : [x_0,\dots,x_n]\in V\} \cup \{(0,\dots,0)\}$.
es el cono afín de V.

Ej: $Z(x_0,x_1,\dots,x_n) = \emptyset$ y $I = (x_0,\dots,x_n) \neq k[x_0,\dots,x_n]$
irrelevante

Teo: I ideal homogéneo en $k[x_0,\dots,x_n]$, $k=\bar{k}$.
Entonces,

(1) $Z(I)=\emptyset \iff \exists N$ tal que I contiene todas las formas de grado $\geq N$ (ie $I \supseteq (x_0,\dots,x_n)^N$)

(2) Si $Z(I)\neq\emptyset \Rightarrow I(Z(I)) = \sqrt{I}$.

Dem:

(1) $Z(I)=\emptyset \iff Z_a(I) \subseteq \{(0,\dots,0)\} \iff \sqrt{I} \overset{!}{=} I(Z_a(I)) \supseteq (x_0,x_1,\dots,x_n)$

Null. afín

$\Rightarrow \exists N,\ x_i^N \in I\ \forall i,\ (x_0,x_1,\dots,x_n)^{(n+1)\cdot N} \subset I.$

(2) $I_{proy}(Z(I)) = I_{afin}(C(Z(I))) = I_{afin}(Z_{afin}(I)) \underset{\text{Null}}{=} \sqrt{I}$ ∎

Ej: Cúbica torsida.

$V = Z(y-x^2, z-x^3) = \{(t,t^2,t^3) : t\in k\} \subset \mathbb{A}^3_k$

$\overline{V} \subset \mathbb{P}^3_k \ni [x,y,z,w]$

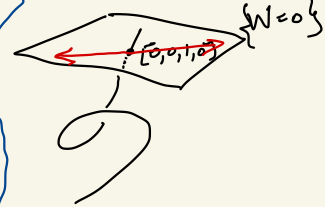
$\neq Z(yw-x^2, zw^2-x^3)$ ¿Porqué?

$= Z'$

$\overline{V} = Z($todos los polinomios homog. de $\underbrace{(y-x^2, z-x^3)}))$

$[t,t^2,t^3,1]\in\mathbb{P}^3_k$

$= [\frac{1}{t^2},\frac{1}{t},1,\frac{1}{t^3}] \xrightarrow[t\to\infty]{} [0,0,1,0]$



$I=(y-x^2,z-x^3) \ni y^3-z^2$

$$(y-x^2)^3 - (z-x^3)^2 = y^3 - z^2 - 3y^2x^2 + 3yx^4 - 2x^6 + 2zx^3$$

$$= y^3 - z^2 + 3yx^2(-y+x^2) + 2x^3(-x^3+z)$$

$Z^1 \cap \{w=0\} \Rightarrow w=0,\ x=0,\ y, z$ libres

$\| \qquad [0, y, z, 0] = \mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1_k$

y $Z^1 = \overline{V} \cup \mathbb{P}^1_k$.

Pero $y^3 - z^2 w = 0$ y $w = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x = 0$ y así $\{w=0\} \cap \overline{V} = \{[0,0,1,0]\}$

De hecho $I(\overline{V}) = \langle x^3 - zw^2, x^2 - yw, y^3 - z^2 w \rangle$

y no se puede generar por solo 2 ecuaciones.

Pero $\overline{V} = H_2 \cap H_3$: $\langle H_2, H_3 \rangle \subsetneq I(\overline{V})$.

$\overline{V}$ es la cúbica torcida (dim 1) y se hecho es imagen de la incrustación de Veronese de grado:

$$\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$$
$$[u,t] \mapsto [u^d, u^{d-1}t, \dots, t^d]$$

la imagen es var. alg.

$$[u,t] \mapsto [u^3, u^2 t, u t^2, t^3]$$
$$[1,t] \mapsto [1, t, t^2, t^3] \text{ cúbica torcida.}$$