Te conozco!

exactos cortos entre haces

$$0 \to \mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log M) \to \mathscr{T}_{\tilde{S}} \to \oplus \mathscr{N}_{M_i/\tilde{S}} \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log(C+M)) \to \mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log M) \to \oplus \mathscr{N}_{C_i/\tilde{S}} \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log(C+M)) \to \mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log C) \to \oplus \mathscr{N}_{M_i/\tilde{S}} \to 0.$$

We then have the following commutative diagram of cohomologies:

diagramas en cohomología

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log(C+M))) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log C)) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\xi"] & \oplus H^1(\mathscr{N}_{M_i/\tilde{S}}) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathscr{T}_{\tilde{S}}(-\log M)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathscr{T}_{\tilde{S}}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\zeta"] & \oplus H^1(\mathscr{N}_{M_i/\tilde{S}}) \arrow[r] & 0 \\
 & \oplus H^1(\mathscr{N}_{C_i/\tilde{S}}) \arrow[r, equal] & \oplus H^1(\mathscr{N}_{C_i/\tilde{S}}) & &
\end{tikzcd}$$

Here all horizontal and vertical sequences are exact. Especially the second row is a short exact sequence, which we explain now briefly: It is shown in Burns-Wahl [4, pp. 70–72] (see also Wahl [25, §6]) that the composition

$$H^1_M(\mathscr{T}_{\tilde{S}}) \to H^1(\mathscr{T}_{\tilde{S}}) \to \oplus H^1(\mathscr{N}_{M_i/\tilde{S}})$$ ...

Extracto de la demostración de Theorem 4.4 en «A simply connected numerical Campedelli surface with involution»

ga20

4/Nov/21

Cohomología

Iny, proy, flasque etc...

Theorem 1.1A : Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathfrak{B}$ categoría abeliana y $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ functor covariante exacto izquierdo.

Entonces,

(a) $\forall i \geq 0$, R^iF es aditivo de $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ e independiente de las resoluciones inyectivas elegidas (salvo $\simeq$).

(b) $F \simeq R^0F$

(c) $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ corta exacta $\Rightarrow \exists \delta^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$ $\forall i \geq 0$ y la sucesión exacta larga

$$\cdots \to R^iF(A') \to R^iF(A) \to R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \to \cdots$$

(d) Dado exactos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Tenemos diagrama conmutativo en sucesiones exactas largas.

(e) $\forall I \in \mathfrak{A}$ inyectivo $\Rightarrow R^iF(I) = 0$ $\forall i > 0$.

Resoluciones libres, proyectivas e inyectivas

Lema : Todo A-módulo M admite una resolución libre, esto es, una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

con F_i A-módulo libre $\forall i$. Si A es Noetheriano y M es f.g. A-módulo $\Rightarrow$ se pueden elegir F_i f.g.

Dem : • Elegir generadores $\{g_i\}_{i\in S}$ de M (pueden ser todos por ejemplo)
- $f_0 : F_0 := \bigoplus_{i \in S} A \to M \to 0$, $1_i \mapsto g_i$.
- luego iterar con $f_1 : F_1 \to \ker(f_0) \to 0$, etc.
- Si A Noetheriano y M f.g. $\Rightarrow \ker(f_0)$ f.g. etc ■

En categorías abelianas generales no es claro qué es un objeto libre ...

$\boxed{\text{Def}}$.- Un objeto P es **proyectivo** si $\forall\ C \xrightarrow{h} B \to 0$ y $\forall\ P \xrightarrow{f} B$, $\exists\ P \xrightarrow{g} C$ tal que $h \circ g = f$.
(no único)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ P \arrow[u, dashed, "\exists"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\square", near start] & & \end{tikzcd}$$

[$\underset{\text{cat. abel.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Hom}(P, \_\_)$ es exacto]

Para A-módulos, podemos caracterizar A-módulo proyectivo de varias maneras [Tarea Fulton: 11 equivalencias].

Lema : P A-módulo es proyectivo $\Leftrightarrow$ $\exists\ P'$ A-módulo tal que $P \oplus P'$ es libre.

Dem.- $\Rightarrow$) • Tomar $\bigoplus A \xrightarrow{h} P \to 0$, con $g: P \to \bigoplus A$ y $P \xrightarrow{\parallel} P$ $\Rightarrow$ $P \hookrightarrow \bigoplus A$ $\Rightarrow$ $\bigoplus A = P \oplus \ker h$

$\Leftarrow$) •
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, dashed, "\text{proy}"] \arrow[u] & P \oplus P' = \bigoplus A \arrow[l] \arrow[ull, bend left, "\exists"] \end{tikzcd}$$

- Si A = dominio ideales principales $\Rightarrow$ P A-mod f.g. proyectivo $\Rightarrow$ libre.
- Si $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $\Rightarrow$ $I = (3, 2+\sqrt{-5})$ es proyectivo (vii) pero no es libre

Teo : A noeth, P A-módulo es proyectivo $\Leftrightarrow$ localmente libre.

Ej.- $\mathbb{Q}$ no es proyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo.

[$\mathbb{Q}_{(p)} = \{ \frac{q}{n} : n \notin (p) \} = \mathbb{Q}$ no es $\mathbb{Z}$-módulo libre ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: $cb \cdot \frac{a}{b} + (-ad) \cdot \frac{c}{d} = 0$ ...)]

$\boxed{\text{Def}}$.- Una categoría abeliana tiene <u>suficientes proyectivos</u> si $\forall$ objeto M, existe P proyectivo y $P \to M \to 0$.

De esta forma $\mathrm{Mod}(A)$ tienen suficientes proyectivos. Si una categoría abeliana tiene suficientes proyectivos $\Rightarrow$ tiene resoluciones proyectivas $\forall$ objeto M:

$$\to \cdots \to P_2 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

PERO $\mathrm{Qcoh}(\mathbb{P}^1_k)$ no tiene suficientes proyectivos. Se puede crear situación contradictoria con $P \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to 0$, P proyectivo.

[• con $\ell >> 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, P(\ell)) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\ell))$

$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to k(p) \to 0$

• tenemos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\ell-1) \to k(p) \to 0$ donde <u>$p \in \mathbb{P}^1$</u>

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\ell-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\ell-1) \to k(p) \to 0$

• P proyectivo $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\text{existe}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\ell-1) \arrow[r] & k(P) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ y tomar secciones globales $\to\leftarrow$]

$\boxed{\text{Def}}$.- Una categoría abeliana tiene <u>suficientes inyectivos</u> si $\forall$ objeto M existe I inyectivo y $0 \to M \to I$ exacta. Luego la categ tendrá resoluciones inyectivas:

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

$$\left[\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_0"] & I_0 \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "f_1"'] & I_0/\mathrm{Im}\, f_0 \arrow[r, hook, "\exists"] & I_1 & \cdots \end{tikzcd}\right]$$

¿Qué es ser inyectivo en ejemplos? ¿Tenemos suficientes inyectivos en $\mathrm{Mod}(A)$? ¿En Ab?

<u>Lema</u>: Un A-módulo inyectivo I es divisible.

[ie $\forall x \in I$ y todo $a \in A$ no divisor de cero, $\exists y \in I$ tq $x = ay$]

<u>Dem</u>:

$$\begin{tikzcd} & & I \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "1 \mapsto x"] \arrow[r, "\cdot a"] & A \arrow[u, dashed, "\exists f"'] \end{tikzcd}$$

dado

exacta

$\Rightarrow \quad a \cdot f(1) = f(a) = x$ ■

<u>Lema</u>: Un $\mathbb{Z}$-módulo (grupo abel.) es inyectivo $\Leftrightarrow$ es divisible.

<u>Dem</u>: • Considerar

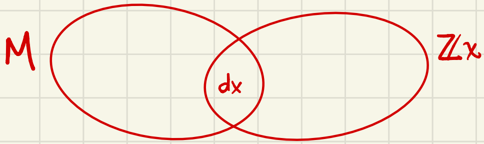
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & B \\ & & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \boxed{M} \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & B \\ & I & \end{tikzcd}$$

• Usar Lema de Zorn para (M, g) donde $A \subset M \subset B$ y $g: M \to I$ extensión. Una cadena ascendente tiene cota superior (tomar la unión) $\Rightarrow$ Existe elemento maximal (M, g) y si $M = B \Rightarrow$ listos.

• Si no, sea $x \in B \setminus M$.

• Sea $M' = M + \mathbb{Z}x \subset B$. Si la suma es directa $\Rightarrow$ listos ($g'(x)$ puede ser cualquier cosa) y $\rightarrow\leftarrow$

• Si no, sea $d =$ mínimo entero > 1 tal que $dx \in M$



$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & B \\ & & I & \end{tikzcd}$$

• YA que I es divisible, $\exists u \in I$ tal que

$$g(dx) = du.$$

• Luego $g'(m + kx) := g(m) + ku$

es un morfismo bien definido.

[Si $m + kx = n + jx \Rightarrow m - n = (j-k)x$

$\Rightarrow j - k = z \cdot d$. Así

$$g(m) + ku = g(n + zdx) + ku = g(n) + zdu + ku$$
$$= g(n) + ju \quad]$$

$\therefore$ g' bien definido $\rightarrow\leftarrow$ $\therefore$ $M = B$ ∎

<u>Lema</u>: Ab tiene suficientes inyectivos.

<u>Dem</u>: $M =$ grupo abeliano, $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

<u>p.d.</u> $\eta : M \to (M^\vee)^\vee$, $m \mapsto [f \mapsto f(m)]$ es 1-1

• Sea $0 \neq m \in M \Rightarrow \exists\, f : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $f(m) \neq 0$
[ya que su definición depende del orden de m en M y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene elementos de todos los órdenes]

- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible y así inyectivo.
- Luego extendemos f a un morfismo $\bar{f}: M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
- Así η es 1-1 ■

$M \hookrightarrow (M^\vee)^\vee$

Ahora, consideramos $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} = F \to M^\vee \to 0$

$\Rightarrow \quad 0 \to (M^\vee)^\vee \longrightarrow F^\vee = \prod_{i\in I} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

y $\prod_{i\in I} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es divisible $\Leftrightarrow$ inyectivo.

Luego $0 \to M \xrightarrow{\eta} (M^\vee)^\vee \hookrightarrow \prod_{i\in I} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ■

Lema: Mod(A) tiene suficientes inyectivos.

Dem: Mirar referencia en Hartshorne / Notas Senia Tevelev §11 ■

Lema: $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado $\Rightarrow$ Mod(X) = cat. de los $\mathcal{O}_X$-módulos tiene suficientes inyectivos.

Dem: En Hartshorne p. 207: Dado $\mathcal{F} \in$ Mod(X), $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ para $x \in X$ y I_x inyectivos.

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I} = \prod_{x\in X} j_*(I_x)$, $j: x \hookrightarrow X$ y el $\mathcal{I}$ es inyectivo ■

Lema: X esp. top $\Rightarrow$ Ab(X) tiene suf. inyectivos.

Dem: Tomar $\mathcal{O}_X := \mathbb{Z}$ haz const. $\therefore$ Ab(X) = Mod(X) ■

Def .- X = esp. topológico.
$\Gamma(X, \_\_): \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$ functor secciones globales.
Se definen los functores cohomológicos $H^i(X, \_\_)$ como el functor derivado derecho de $\Gamma(X, \_\_)$.

Dado $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$, los $H^i(X, \mathcal{F})$ son los <u>grupos de cohomología de $\mathcal{F}$</u>.

Def .- X = esp. top., $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ es <u>flasque</u> si $V \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(V) \to 0$.

<u>Lema</u>: $(X, \mathcal{O}_X)$ esp. anillado $\Rightarrow$ inyectivo $\mathcal{O}_X$-mod es flasque.

<u>Dem</u>: Dado $\mathcal{U} \overset{\circ}{\subset} X$ abierto, tenemos $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} := j_!(\mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ en X que la restricción extendida a 0 fuera de $\mathcal{U}$.

- Sea I inyectivo y $V \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ I(\mathcal{U})}}{\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}, I)} \to \underset{\substack{\parallel \\ I(V)}}{\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_V, I)} \to 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{exacto}\\ \text{en inyect}\end{array}\right)$$

∎

<u>Prop</u>: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$.

<u>Dem</u>: • $0 \to \mathcal{F} \to I$ inyectiva y $\mathcal{G} = I/\mathcal{F}$.

- Como I es flasque $\Rightarrow \mathcal{G}$ lo es. [Tarea].

- Como $\mathcal{F}$ es flasque, sabemos que

$0 \to \mathcal{F} \to I \to \mathcal{G} \to 0$

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to 0 \quad [\text{II. Ex. } 1.16b]$$

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{F}) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(\mathcal{I})} \to H^1(\mathcal{G}) \to H^2(\mathcal{F})$$

$$H^2(\mathcal{F}) \to 0 = H^2(\mathcal{I}) \to \vdots$$

- Sabemos que $H^i(X, \mathcal{I}) = 0 \quad i > 0$

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ y $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{G})$ $\forall i \geq 2$.

y así usar inducción ■

obs! Mirar Hartshorne: si tenemos resolución acíclica $\Rightarrow$ se puede calcular cohomología con esa resolución. Como los inyectivos de $\mathrm{Mod}(X)$ son flasques y así acíclicos $\Rightarrow$ se puede calcular la misma cohomología que en $\mathrm{Ab}(X)$.

obs! : $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado y $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \Rightarrow \forall \mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-modulo tenemos que $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es A-módulo.
$\Rightarrow$ Todos los grupos de cohomología serán A-módulos.

Si $X \to \mathrm{Spec}\, B$, entonces serán B-módulos. En particular pensar en variedades $\to \mathrm{Spec}\, k$

$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$ son k-espacios vectoriales.

Teorema (Grothendieck paper en Tôhoku 1957)

X = espacio topológico Noetheriano dim n
$\mathcal{F}$ = haz grupos abelianos

$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \; i > n$.