objetos matemáticos.

Su manera de enfrentar el trabajo era excepcional. Aunque fue capaz de resolver tres de las cuatro conjeturas de Weil, los mayores enigmas matemáticos de su época, a Grothendieck no le atraían los problemas difíciles ni le interesaban los resultados finales. Su afán era alcanzar una comprensión absoluta de los fundamentos, por lo que construía complejas arquitecturas teóricas alrededor de las interrogantes más simples, rodeándolas con un ejército de nuevos conceptos. Bajo la suave y paciente presión de la razón de Grothendieck, las soluciones parecían brotar por sí mismas, revelándose por voluntad propia, «como una nuez que se abre tras permanecer sumergida bajo el agua durante meses».

Lo suyo fue la generalización, el *zoom out* llevado al paroxismo. Cualquier dilema se volvía sencillo si uno lo miraba desde la distancia suficiente. No le interesaban los números, las curvas, las rectas ni ningún otro objeto matemático en particular: lo único que importaba era *la relación entre ellos*. «Tenía una sensibilidad extraordinaria a la armonía de las cosas», recuerda uno de sus discípulos, Luc Illusie. «No es solo que haya introducido nuevas técnicas y probado grandes teoremas: cambió la forma en que pensamos sobre las matemáticas.»

Su obsesión fue el espacio y una de sus mayores genialidades fue expandir la noción del punto. Ante la mirada de Grothendieck, el humilde punto dejó de ser una posición sin dimensiones para bullir con complejas estructuras internas. Donde otros veían algo sin profundidad, tamaño, ancho ni largo, Alexander vio un universo entero. Desde Euclides no se había propuesto algo tan audaz.

ga21

9-Nov-21

Anulación de Grothendieck y Caracterización Afín de Serre

Extracto p. 77-78 del libro de Labatut.

Theorem 2.7 (Grothendieck, Tôhoku)

Sea X = esp. top. Noetheriano de dim n y $\mathcal{F}$ = haz de grupos abelianos.

Entonces $H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n$.

Esto será por inducción en n a través de conjuntos cerrados Y de X.

Si $Y \subset X$ conjunto cerrado y $\mathcal{F}$ haz en X

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_Y := j_*(\mathcal{F}|_Y), \quad j : Y \hookrightarrow X$$

Si $\mathcal{U} = X \setminus Y \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{U}} := i_!(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}), \quad i : \mathcal{U} \hookrightarrow X$

y así tenemos sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0 \qquad (*)$$

Lema: $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X$ cerrado, $\mathcal{F}$ haz en Y. Entonces

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$$

donde $j_*\mathcal{F}$ es la extensión de $\mathcal{F}$ por cero fuera de Y

Dem: Si $0 \to \mathcal{F} \to I^\bullet$ es resolución flasque

$\Rightarrow \quad 0 \to j_*\mathcal{F} \to j_* I^\bullet$ es resolución flasque

y para cada i, $\Gamma(Y, I^i) = \Gamma(X, j_* I^i)$.

$\therefore$ Se calculan las mismas cohomologías ∎

Reducción irreducible :

Si Y es componente de X $\Rightarrow$ usar $(*)$ para declarar que nesecitamos

$$H^i(X, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}) = 0 \quad y \quad H^i(X, \mathcal{F}_Y) = 0$$

para $i > n$.

Pero si consideramos $\overline{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ tenemos menos componentes y

$$H^i(X, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}) = H^i(\overline{\mathcal{U}}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}) \qquad H^i(X, \mathcal{F}_Y) = H^i(Y, \mathcal{F}|_Y)$$

por el lema. Con lo cual inducción en n permite reducir el problema a X irreducible.

Caso $\dim X = 0$.

Si X es irreducible y de dim 0 $\Rightarrow$ únicos abiertos son X y $\emptyset$.

Se esta forma $\Gamma(X, \_)$ induce una equivalencia de categorías $\underline{Ab(X)}$, Ab. En particular es functor exacto y así $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall\, i > 0$, $\forall\, \mathcal{F}$.

Un desvío: $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Z}}$.

Si X irred. de dim n e $Y \subset X$ irred. (y así dim $< n$), $\mathcal{U} = X \setminus Y$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Y \to 0$$

$\Rightarrow$ para $i > n$ tenemos

$$\cdots \to \underbrace{H^{i-1}(X, \mathbb{Z}_Y)}_{\substack{0 \\ \text{inducción}}} \to H^i(X, \mathbb{Z}_{\mathcal{U}}) \to \underbrace{H^i(X, \mathbb{Z})}_{\text{flasque!}} \to \cdots$$

$$\Rightarrow \quad H^i(X, \mathbb{Z}_{\mathcal{U}}) = 0 \quad \forall i > n.$$

Resulta que deconstruiremos un $\mathcal{F}$ cualquiera para llegar a esta situación!

Límites directos.

I = conjunto dirigido (parcialmente ordenado y $\forall i, j \ \exists k$, $k \geq i, j$)

Un <u>sistema directo</u>: $\{A_i\}_{i \in I}$ grupos abelianos

$f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ morfismos $\forall i \leq j$ tal que

(1) $f_{ii} = \mathbb{1}_{A_i}$ (2) $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\square"] & & A_j \arrow[dl] \\ & A_k & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Def}}$.- Un A junto con morfismos $\varphi_i : A_i \to A$ tal que $\varphi_j \circ f_{ij} = \varphi_i$ es un <u>límite directo</u> si para toda B con $\psi_i : A_i \to B$ con $\psi_j \circ f_{ij} = \psi_i$ existe único

$$u : A \to B$$

tal que $u \circ \varphi_i = \psi_i$. Notación $A := \varinjlim A_i$.

<u>Existencia</u>: $\varinjlim A_i = \bigsqcup A_i / \sim$

$$\underset{A_i}{\overset{x_i}{\cap}} \sim \underset{A_j}{\overset{x_j}{\cap}} \quad \text{si } \exists k \geq i, j \text{ tq } f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j).$$

<u>Ejemplo</u>: X esp top, $\mathcal{F}$ haz y $\{U_i\}$ abiertos tq $x \in U_i \ \forall i$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_x \simeq \varinjlim \mathcal{F}(U_i).$$

$\boxed{\text{Def}}$.- Sea $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ un sistema directo de haces en X, entonces se define

$$\varinjlim \mathcal{F}_\alpha$$

como el haz asociado a $U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$.

<u>Ex</u> 1.10, 1.11: X = esp. topológico Noetheriano entonces el prehaz es haz y $\Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_\alpha)$.

Lema: $X =$ Noetheriano, $\mathcal{F}_\alpha$ flasque
$\Rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ flasque.

Dem: $\varinjlim$ es functor exacto y así

$V \subseteq \mathcal{U}$ $\qquad \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha(V) \to 0$

$$\Rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{U}) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(V) \to 0$$

$$\underset{\text{(anterior)}}{\Rightarrow} (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(\mathcal{U}) \to (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(V) \to 0 \qquad \blacksquare$$

Prop. 2.9: $X =$ Noetheriano, $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ sist. dirigido de haces de grupos abelianos

$$\Rightarrow \varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\simeq} H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha).$$

(mirar Hartshorne p. 209)

La deconstrucción y final

Sea X irreducible de dim n, $\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$.

Sea $B = \bigcup_{\substack{\mathcal{U} \subseteq X \\ \text{abierto}}} \mathcal{F}(\mathcal{U})$, $A = \{$ conjuntos finitos de $B\}$
$\qquad \alpha = \{\alpha_{\mathcal{U}_1}, \dots, \alpha_{\mathcal{U}_n}\} \in A$

Definir $\mathcal{F}_\alpha :=$ sub-haz más pequeño de $\mathcal{F}$ que contiene los elementos en α

Luego, $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{U}) = \langle \alpha_{u_1}|_{\mathcal{U}}, \dots, \alpha_{u_n}|_{\mathcal{U}} \rangle \subset \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Luego A es un conjunto dirigido con la inclusión usual.

Se puede mostrar que $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ y así basta mostrar $H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) = 0$ $i > n$.

Si $\alpha' \leq \alpha$ $\Rightarrow$ $0 \to \mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G} \to 0$

y $\mathcal{G}$ es el haz más pequeño en $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\alpha'}$ generado por imagen de $\mathcal{F}_\alpha$ y contiene menos secciones.

$\therefore$ podemos reducir al caso de $\#\alpha = 1$.

Sea $\mathcal{F}$ generado por una sección en $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto. Luego tenemos

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{F} \to 0$$

donde $\mathcal{R}$ es el kernel. Asumir $\mathcal{R} \neq 0$.

$\forall x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{R}_x \leq \mathbb{Z}$ y así $\mathcal{R}_x = d_x \mathbb{Z}$

Sea d el menor entero positivo $\forall x \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists\, x$ con $d_x = d$ y vecindad $V \subseteq \mathcal{U}$

tq $\mathcal{R}|_V \simeq d\,\mathbb{Z}_V$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \mathbb{Z}_V \to \mathcal{R} \to \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \to 0$$

y soporte de $\mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \subseteq \overline{U \setminus V}$ que es un cerrado de dimensión $< n$ (X irred).

Así por hipótesis de inducción

$$H^i(X, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) = 0 \ , \ i \geq n$$

y ya sabemos $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0 \quad i > n$

$$\Rightarrow \ H^i(X, \mathcal{R}) = 0 \quad \forall i > n$$

$$\therefore \ H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n \quad \blacksquare$$

<u>Theorem 3.5</u> (Serre) $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{F}$ cuasi-coherente
Noetheriano

$$\Rightarrow \ H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ , \forall i > 0.$$

<u>Dem</u>: recordar que $\mathcal{F} = \tilde{M}$, M A-módulo.

Por otro lado (mirar Hartshorne) si I es A-módulo inyectivo $\Rightarrow \tilde{I}$ es flasque en $\mathrm{Spec}(A)$ [parte por probar $I \twoheadrightarrow I_f$, $f \in A$].

También, dado $\mathcal{G} = \tilde{M}$, $\Gamma(X, \mathcal{G}) = M$.

Si $0 \to M \to I^\bullet$ es resolución inyectiva

$\Rightarrow \ 0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\bullet$ es resolución flasque y calculas $\Gamma(X, -)$ da $0 \to M \to I^\bullet$ de vuelta $\blacksquare$

En efecto:

Theorem 3.7 (Serre)

X = esquema Noetheriano, entonces:

(1) X afín $\iff$ (2) $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i > 0$, $\forall \mathcal{F}$ cuasi coherente $\iff$ (3) $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ $\forall \mathcal{I}$ haz ideales

idea dem: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ok

(3) $\Rightarrow$ (1) Se usa el criterio afín

X afín $\iff$ $\exists f_1, \dots, f_r \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tal que $X_{f_i} = \{x \in X : f_i|_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ afín y $(f_1, \dots, f_r) = (1)$.

Sea $p \in X$ punto cerrado, $\mathcal{U}_p$ vecindad afín de p y $Y = X \setminus \mathcal{U}_p$. Entonces

$$0 \to \mathcal{I}_{Y \cup \{p\}} \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p = k(p) \to 0$$

Por hipótesis + Suc. exacta larga:

$$\Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \twoheadrightarrow k(p)$$

$\therefore$ $\exists f_p \in \Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tq $f_p \mapsto 1$.

Considerar $X_{f_p} \simeq \operatorname{Spec}(\Gamma(\mathcal{U}_p, \mathcal{O}_X)_{f_p})$, $f_p \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

Tenemos $X = \bigcup_{p \in X} X_{f_p} \underset{\text{(Noeth)}}{\Rightarrow} X = \bigcup_{i=1}^{r} X_{f_i}$

Sólo nos falta $(f_1, \dots, f_r) = (1)$.

Tenemos

$$\mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \quad , \quad (a_1, \dots, a_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} a_i f_i$$

ya que $\exists i$ con $f_i = 1$ en los tallos.

$$\therefore \quad 0 \to \mathcal{F} = \ker \longrightarrow \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Basta con demostrar que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

DECONSTRUIR!

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^r = \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^{r-1} \supseteq \dots \supseteq \underbrace{\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X}_{\text{haz ideales}}$$

y $$\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^j \big/ \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^{j-1} \subseteq \mathcal{O}_X^j \big/ \mathcal{O}_X^{j-1} \simeq \mathcal{O}_X$$

$$\therefore \quad 0 \to \underbrace{\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^{j-1}}_{\text{inducción}} \longrightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^j \longrightarrow \underbrace{\mathcal{I}_j}_{\text{haz ideales}} \to 0$$

$$\therefore \quad H^1(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \blacksquare$$