ga 22

11/Noviembre/21

Čech

Objetivo: Construir cohomología calculable y que coincide con la usual.

X = esp. topológico, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto

Elegir un buen orden en I.

Denotar $\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_p} := \mathcal{U}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_p}$.

$\mathcal{F}$ = haz de grupos abelianos.

$\boxed{\text{Def}}$.- (Cocadena de Čech) Para $p \geq 0$,

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0, \dots, i_p})$$

$\Downarrow$

$\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_p})$, $\quad d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$d(\alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}} \Big|_{\mathcal{U}_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

[$\mathcal{U}$ finito $\quad 0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^m(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to 0$]

Obs:
- Tenemos que $d \circ d(\alpha) = 0$ (Tarea).
- A veces será conveniente repetir índices con lo cual $\alpha_{i_0, \dots, i_{p+1}} = 0$ o permutarlos y así $\alpha_{i_0, \dots, i_{p+1}} = (-1)^{\text{signo}(\sigma)} \alpha_{\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_{p+1})}$.

$\boxed{\text{Def}}$.- Se define $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^i(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.

obs: $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exacta no implica sucesión exacta larga en cohomología Čech.

$$\left[\text{eg. } \mathcal{U} = \{X\}, \quad \check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) \right]$$

Ej: $X = \mathbb{P}^1_k$, $\Omega = \Omega^1_{\mathbb{P}^1_k}$ haz de diferenciales

$\mathcal{U} = \{ \mathbb{A}^1_x, \mathbb{A}^1_y \}$ con $y = \frac{1}{x}$ en el pegado

$$C^0 = \underbrace{\Gamma(\mathbb{A}^1_x, \Omega)}_{k[x]\,dx} \times \underbrace{\Gamma(\mathbb{A}^1_y, \Omega)}_{k[y]\,dy} \qquad C^1 = \underbrace{\Gamma(\mathbb{A}^1_x \cap \mathbb{A}^1_y, \Omega)}_{k[x, \frac{1}{x}]\,dx}$$

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \check{H}^0 = \ker d_0 &= \{ (f\,dx, g\,dy) \;/\; d_0 = 0 \} \\ &= \{ \quad \% \quad / \; g(y)\,dy|_\cap - f(x)\,dx|_\cap = 0 \} \\ &= \{ \quad \% \quad / \; g(\tfrac{1}{x}) \cdot \tfrac{-1}{x^2}\,dx = f(x)\,dx \} \\ &= \{ \quad \% \quad / \; g = f = 0 \} = 0 \end{aligned}$$

$$\check{H}^1 = C^1 / \operatorname{Im} d_0 \qquad f(x)\,dx + g(\tfrac{1}{x}) \cdot \tfrac{1}{x^2}\,dx \qquad f, g \in k[x]$$

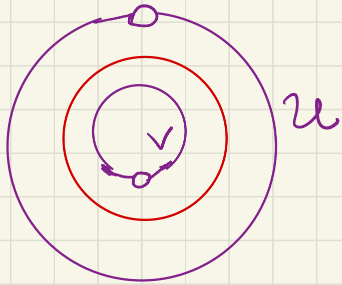
La única potencia de $\frac{1}{x}$ que sobrevive es $\frac{1}{x}$.

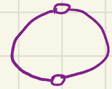
$$\therefore \quad \check{H}^1 = \langle \tfrac{1}{x} \rangle \simeq k.$$

$$\left[\Omega^1_{\mathbb{P}^1_k} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2) \qquad H^0(\mathcal{O}(-2)) = 0 \qquad H^1(\mathcal{O}(-2)) \underset{\text{Serre}}{=} H^{\overset{0}{\overset{\|}{n-1}}}(\mathcal{O}(-2) \otimes \underset{\substack{\| \\ \text{dual a } \mathcal{O}(-2)}}{\mathcal{O}(+2)}) \right.$$

$n=1$ $\qquad \mathcal{O}(-2) \simeq \mathcal{O}(K) \simeq \Omega^1$ $\qquad K$ $\qquad \left. = H^0(\mathcal{O}) = k \right]$

Ej 1.- $X = S^1$, $\mathcal{F}$ = haz constante $\mathbb{Z}$



$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} =$ 

$$C^0 = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \times \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$C^1 = \Gamma(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$0 \to \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{C^0} \xrightarrow{d_0} \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{C^1} \longrightarrow 0$$

$$\check{H}^0 = \ker d_0 = \{ (a,b) : b|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} - a|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} = 0 \}$$

$$= \{ \quad '' \quad : (b-a, b-a) = (0,0) \}$$

$$= \{ (a,a) : a \in \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z} .$$

$$\check{H}^1 = C^1 / \operatorname{Im} d_0 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / \langle (1,1) \rangle \simeq \mathbb{Z} .$$

Lema: $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Dem: Por definición ($\alpha_i = \alpha_j \ \forall i,j \Rightarrow \exists! \alpha$ global). ■

$$[\ 0 \to \prod \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})\ ]$$

$\boxed{\text{Def}}$.- (haciendo complejos) Para un abierto $\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}$ se denota $f : \mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p} \hookrightarrow X$. Definimos

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} f_*\left(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}}\right) .$$

Obs: $\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y d es como antes.

Lema : $\mathcal{C}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{F}$, i.e. $\exists\, \varepsilon$ tal que

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d} \cdots$$

es exacta.

Dem : Si $V \subseteq X$ abierto, entonces

$$\varepsilon(s) = \left(s|_{\mathcal{U}_i \cap V}\right)_{i \in I}$$

con $s \in \mathcal{F}(s)$. Luego es inyectiva.

Notar que $\ker(\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1) = \operatorname{Im} \varepsilon$.
Para la exactitud del resto, tomamos $x \in X$ y localizamos

$$\mathcal{C}^0_x \to \mathcal{C}^1_x \to \cdots .$$

Construir $k : \mathcal{C}^p_x \to \mathcal{C}^{p-1}_x$ tal que

$$(dk + kd)(\alpha) = \alpha \in \mathcal{C}^p_x \qquad 1\!\!1 \sim 0$$

de la siguiente manera : α_x se representa por α en $V \ni x$ y $V \subset U_j\ \forall j$, luego

$$(k\alpha)_{i_0, \dots, i_{p-1}} := \alpha_{j, i_0, \dots, i_{p-1}}$$

[usar convención y notar $\mathcal{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}} = V \cap \mathcal{U}_{j, i_0, \dots, i_{p-1}}$].

$\therefore\ 1\!\!1_{\mathcal{C}^\bullet_x} \sim 0 \Rightarrow 1\!\!1 : \mathcal{C}^\bullet_x \to \mathcal{C}^\bullet_x$ es el morfismo 0 en cohom $\Rightarrow H^p(\mathcal{C}^\bullet_x) = 0\ \forall p \geq 1$
$\therefore$ es exacta ∎

Prop: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0 \quad \forall p>0$.

Dem: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}}$ flasque en $\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}$ y f_* preserva flasque, y $\prod$ flasque es flasque $\therefore$ $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es flasque y tenemos resolución flasque $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\bullet$.

- Luego podemos tomar cohomología usual y así flasque $\Rightarrow H^p(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall p \geq 1$
- Por otro lado,

$$H^p(X,\mathcal{F}) = H^p(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) = \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad \blacksquare$$

Lema: X = esp. topológico, $\mathcal{U}$ cubrimiento abierto $\Rightarrow \exists$ morfismo natural, functorial en $\mathcal{F}$

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{F}).$$

Dem: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ inyectiva

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\bullet$ Čech

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 \to & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\bullet & \\ & \downarrow \| & & \downarrow & \leftarrow \text{existe por inyectivo} \\ 0 \to & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}^\bullet & \end{array}$$

[único salvo homotopía, ie, único en coh] $\blacksquare$

__Theorem 4.5:__ X = esquema Noetheriano y separable

$\mathcal{U}$ = cubrimiento por afines

$\mathcal{F}$ = haz cuasi-coherente

$$\Rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F}).$$

__Dem__: $p=0$ ya lo tenemos.

- En general, primero $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ cuasi-coherente y flasque [Corollary 3.6].

  cuasi-coh también

  $\therefore \quad 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{R} \to 0. \qquad (*)$

- Tenemos que todo $\mathcal{U}_{i_1,\dots,i_p}$ es afín ya que X es separable.
- Así

  $$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathcal{R}(\mathcal{U}_{i_1,\dots,i_p}) \to 0$$

  exacta.

- Tomando productos, tenemos

  $$0 \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \to 0$$

  exacta.

- y así la sucesión larga exacta en cohomología Čech.
- Como $\mathcal{G}$ es flasque, tenemos

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{R}) \to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to 0$$

y $$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\simeq} \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}). \quad (**)$$

- Usar $(*)$ con cohomología usual:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{R}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H^1(X,\mathcal{F}) \simeq \check{H}^1(X,\mathcal{F}).$$

- Luego inducción en p usando $(**)$ ∎