ga 23

Cohomología de haces en $\mathbb{A}^n$

Theorem 5.1 : A = anillo Noetheriano , $X = \mathbb{P}^r_A$.

(a) El morfismo natural

$$S = A[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$$

es un isomorfismo de S-módulos graduados.

(b) $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \ , \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(c) $H^r(X, \underbrace{\mathcal{O}_X(-r-1)}) \simeq A$ $\qquad \mathcal{O}_X(K_{\mathbb{P}^r_A}) \simeq \mathcal{O}_X(-r-1)$

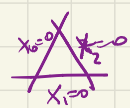
(d) El morfismo natural será $H^r(X, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_X(-n))$ // $\quad A \simeq$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(\underset{d-2}{n})) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(\underbrace{-n-r-1}_{-n-2 = -d})) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$$

es un perfect pairing de A-módulos f.g. $\forall n \in \mathbb{Z}$.

[$M \times N \to L$ bilineal es un perfect pairing si $\Phi : M \to \mathrm{Hom}(N, L)$ es un isomorfismo]

"Dem" : Usaremos el haz cuasi-coherente $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$ y calcularemos su cohomología Čech .



Dado $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $\mathcal{U}_i = D_+(x_i)$ abierto afín.

$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}$ es cubrimiento afín de X .

$\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p} = D_+(x_{i_0} \cdots x_{i_p})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0 \cdots i_p}) \simeq S_{x_{i_0} \cdots x_{i_p}}$

(II 5.11)

$\therefore\ C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}): \quad \prod S_{x_{i_0}} \to \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \to \cdots \to S_{x_0\cdots x_r}$

$$\therefore\ \check{H}^0 = \Gamma(X,\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X,\mathcal{O}_X(n)) = S.$$

El (b) por inducción en r ($r=1$ trivial) y usando el hiperplano $H=\{x_r=0\}$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_H \to 0$$

$\mathbb{P}^1 = H \subset \mathbb{P}^2 \qquad H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{F}_H) \to H^1(\mathcal{F}(-1)) \to H^1(\mathcal{F})^{=0} \to H^1(\mathcal{F}|_H) \to H^2(\mathcal{F}) \to \cdots$

[hay cálculo con monomios para hacerlo en privado]

Sea $d: \prod_k S_{x_0\cdots\hat{x}_k\cdots x_r} \to S_{x_0\cdots x_r}$.

Considerar $S_{x_0\cdots x_r} = \langle x_0^{l_0}\cdots x_r^{l_r} : l_i\in\mathbb{Z}\rangle$ como A-módulo libre

La imagen de d es libre generada por monomios con al menos un $l_i \geq 0$

$$\left[\ d(f_0,f_1,\dots,f_r) = \underset{x_0^{\geq 0}}{f_0} - \underset{x_1^{\geq 0}}{f_1} + f_2 - \cdots\ \right]$$

$$\Rightarrow H^r(\mathcal{F}) = S_{x_0\cdots x_r}/\mathrm{Im}\, d = \langle x_0^{l_0}\cdots x_r^{l_r} : l_i<0\ \forall i\rangle$$

La graduación está dada por $\sum l_i$. Así solo hay un monomio de grado $-r-1$

$$\Rightarrow H^r(X,\mathcal{O}_X(-1-r)) \simeq A.$$

Para (d), se interpreta como ($n \geq 0$):

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$$

$$x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} \qquad x_0^{l_0} \cdots x_r^{l_r} \quad \mapsto \quad x_0^{m_0+l_0} \cdots x_r^{m_r+l_r}$$

$m_i \geq 0 \quad \sum m_i = n \qquad l_i < 0 \quad \sum l_i = -n-r-1 \qquad$ y es cero si $m_i + l_i \geq 0$

base dual a $x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}$ es $x_0^{-m_0-1} \cdots x_r^{-m_r-1}$. ∎

Theorem 5.2 (Serre FAC) $\quad X \to \mathrm{Spec}(A)$

Sea X un esquema proyectivo sobre A Noetheriano, $\mathcal{O}_X(1)$ el haz muy amplio, $\mathcal{F}$ = haz coherente en X

Entonces,

(a) $H^i(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado

(b) $\exists\, n_0 = n_0(\mathcal{F})$ tal que $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall i > 0$.

Dem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_A \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec} A \end{tikzcd}$$

, $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_X(1)$, $i_*\mathcal{F}$ es coherente en $\mathbb{P}^n_A$

y $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n_A, i_*\mathcal{F}) \;\; \forall i$

Por eso tomamos $X = \mathbb{P}^n_A$. (b) $H^i(\cancel{q}\, \underbrace{n}_{\gg 0})$ $\;\Big|\;$ (a) $H^0(\mathcal{O}_X(q)) = \{$ q-formas, 0; $H^i(\quad) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$

Por otro lado, (a) y (b) son válidos para $\mathcal{O}_X(q)$ por Teorema anterior, y así para $\oplus$ de ellos.

Se usará inducción descendente en i.

Si $i > n \Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ ($n+1$ abiertos afines cubren)

En general, $\mathcal{F}$ coherente $\Rightarrow \mathcal{F}(n)$ es generado por secciones globales $\forall n \gg 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\oplus \mathcal{O}(-n)}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{F} \to 0.$$

$\oplus \mathcal{O} \to \mathcal{F}(n) \to 0$

$\mathcal{E} = \oplus \mathcal{O}(-n) \to \mathcal{F} \to 0$ $\mathcal{O}(-n)$

$\Rightarrow \quad 0 \to \mathcal{Q} = \ker \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$, $\mathcal{Q}$ coherente

$$\Rightarrow \cdots \to \underbrace{H^i(X, \mathcal{E})}_{\text{f.g. } A\text{-mod}} \to H^i(X, \mathcal{F}) \to \underbrace{H^{i+1}(X, \mathcal{Q})}_{\substack{\text{f.g. } A\text{-mod} \\ \text{por inducción}}} \to \cdots$$

$+ A$ Noetheriano $\Rightarrow$ $H^i(X, \mathcal{F})$ f.g. A-mod. $\Rightarrow$ (a) ✓

Para (b): $n \gg 0$

$$\cdots \to \underbrace{H^i(X, \mathcal{E}(n))}_{\substack{=0 \text{ ya} \\ \text{que eso} \\ \text{pasa con } \mathcal{O}(n) \\ n \gg 0}} \to H^i(X, \mathcal{F}(n)) \to \underbrace{H^{i+1}(X, \mathcal{Q}(n))}_{\substack{\text{por inducción} \\ \text{es } 0 \\ \text{para } n \gg 0}} \to \cdots$$

■

Obs. - Esto es otra demostración de porqué $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es f.g. A-módulo.

Prop. 5.3: A = Noetheriano, $X \to \operatorname{Spec}(A)$ propio, $\mathcal{L}$ invertible en X. Luego,

(a) $\mathcal{L}$ amplio $\iff$ (b) $\forall \mathcal{F}$ coherente en X, $\exists n_0 = n_0(\mathcal{F})$ tal que

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$$

$\forall n \geq n_0$, $\forall i > 0$.

"Dem":

(a) ⇒ (b) Si $\mathcal{L}$ amplio ⇒ $\mathcal{L}^{\otimes n}$ es muy amplio y nos da una inmersión cerrada

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}^m_A \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

y luego usar Theorem 5.2.

(b) ⇒ (a) Necesitamos mostrar que $\forall \mathcal{F}$ coherente en X $\exists n_0$ tq $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}$ es generado por secciones globales $\forall n \geq n_0$. [definición de amplio!]

Sea $\mathcal{F}$ coherente, $p \in X$ punto cerrado, $\mathcal{I}_p$ su ideal

$$\Rightarrow \quad 0 \to \underbrace{\mathcal{I}_p \otimes \mathcal{F}}_{} \to \mathcal{F} \to k(p)\otimes\mathcal{F} \to 0$$

No importante, podríamos tomar la imagen de $\mathcal{I}_p\otimes\mathcal{F}\to\mathcal{F}$

$$\therefore \quad 0 \to \mathcal{I}_p\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n} \to k(p)\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(k(p)\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}) \to \underbrace{\cancel{H^1(\mathcal{I}_p\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})}}_{0} \quad \forall n \geq n_0.$$

$\therefore$ El tallo en $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})_p$ es generado por secciones globales, y así hay vecindad $p \in \mathcal{U}$ tal que $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})_q$ es generado por secciones globales $\forall q \in \mathcal{U}$.

Luego leer Hartshorne para que esto sea válido para todo $n \geq n_0$ ... ∎

X esquema proy. sobre k, $\mathcal{F}$ haz coherente en X

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\chi(\mathcal{F})}_{\text{característica de Euler de } \mathcal{F}} := \sum_{i\geq 0} (-1)^i \underbrace{\dim_k H^i(X,\mathcal{F})}_{h^i(X,\mathcal{F})} .$$

$\chi(\mathcal{F})$ se podrá calcular a través de Riemann-Roch general $\chi(\underline{\mathcal{F}}) = \underbrace{\quad}_{\text{interse.}}$

Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exacta

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'') .$$

[la demostración es lo típico de romper la sucesión larga con $\ker = \operatorname{Im}$, etc]

Si $\dim X = r \Rightarrow \underbrace{p_a(X)}_{\text{género aritmético de } X} := (-1)^r \left(\chi(\mathcal{O}_X) - 1 \right)$

[Si $r = 1 \Rightarrow p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X) - h^0(\mathcal{O}_X) + 1$.

X curva proy. $p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(K_X) = g$, Ω^1_X

Si $r = 2 \Rightarrow p_a(X) = h^0(\mathcal{O}_X) - \underbrace{h^1(\mathcal{O}_X)}_{\text{irreg.}} + \underbrace{h^2(\mathcal{O}_X)}_{h^0(K_X)} - 1$.]

Si X es integral $\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X) = k$ y así

$r = 1 \Rightarrow p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$

$r = 2 \Rightarrow p_a(X) = h^2(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X)$, ...

Notar que si $X \subset \mathbb{P}^n_k$ es hipersuperficie y $n \geq 2$

$\Rightarrow \quad 0 \to \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0$

$\Rightarrow$ como $H^1(\mathcal{O}(-d)) = 0$, $H^0(\mathcal{O}_X) \simeq k$.

$$\cdots \to \underset{k}{\underset{\|}{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})}} \to \underset{k}{\underset{\cup}{H^0(\mathcal{O}_X)}} \to \overset{0}{\cancel{H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d))}} \to \cdots$$

$X \subset \mathbb{P}^1$

$k \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_X)$

$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-d))$

$H^0(\quad) \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d-2))^{\neq 0 \; d\geq 2} \overset{!?}{=} 0$ si $d = 1$ $\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2)) = 0 \Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \simeq k$

$\Rightarrow \quad 0 \to k \to H^0(\mathcal{O}_X) \to k^{d-1} \to 0$

Mirar ejercicios 5.2 (a), (b):

(a) X esquema proy. sobre k, $\mathcal{O}_X(1)$ muy amplio, $\mathcal{F}$ coherente
$\Rightarrow \exists\ P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = p(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(b) Para $X = \mathbb{P}^m_k$, $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ coherente
$\Rightarrow \chi(\mathcal{F}(n))$ es el antiguo polinomio de Hilbert.

Particularmente importante es $\chi(\mathcal{O}_X(n))$!

Del Exercise 5.6: $X = \{xy = wz\} \subseteq \mathbb{P}^3_k$

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Todo $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(a,b)$. ¿Cómo calcular $H^i(X, \mathcal{L})$?

$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(a,0)$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-F_1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{F_1} \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(F_1) \to \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}_{F_1}(F_1)}}{\mathcal{O}_{F_1}} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H^0(\mathcal{O}(F_1)) \simeq k^2 \qquad H^1(\mathcal{O}(F_1)) = H^2(\mathcal{O}(F_1)) = 0$$

$$0 \to \overset{k}{H^0(\mathcal{O}_X)} \to H^0(\mathcal{O}_X(F_1)) \to \overset{k}{H^0(\mathcal{O}_{F_1})} \to \overset{0}{H^1(\mathcal{O}_X)} \to H^1(\mathcal{O}_X(F_1)) \to \overset{0}{H^1(\mathcal{O}_{F_1})} \to \overset{0}{H^2(\mathcal{O}_X)} \to H^2(\mathcal{O}_X(F_1)) \to 0$$

e inducción, $H^0(\mathcal{O}(aF_1)) \simeq k^{a+1}$ si $a \geq 0$. $H^1 = H^2 = 0$

Si $a < 0 \Rightarrow H^0(\mathcal{O}(-aF_1)) = 0$

$$0 \to H^1(-F_1) \to 0 \to 0 \to H^2(-F_1) \to 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{F_1}) \to H^1(-2F_1) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^1(-F_1)} \to 0 \to H^2(-2F_1) \to H^2(-F_1) \to 0$$

$\Rightarrow H^1(-2F_1) = k$, $H^2(-2F_1) = 0$ $\qquad 0 = H^2(-F_1)$

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{F_1}) \to H^1(-(a+1)F_1) \to H^1(-aF_1) \to 0$$

$$0 \to H^2(-(a+1)F_1) \to H^2(-aF_1) \to 0$$

$$\therefore \quad H^1(-(a)F_1) \simeq k^{a-1} \qquad H^2(-aF_1) = 0$$

$$\left[\overset{\text{2| serre}}{H^1((a-2)F_1 - 2F_2)} \, ? \qquad \overset{\text{2| serre}}{H^0((-2+a)F_1 - 2F_2)} = 0 \right]$$

Desde $\mathbb{P}^3$: $\quad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0$

y $\quad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \to \mathcal{O}_X(n,n) \to 0$

$\therefore$ Calcular $H^i(\mathcal{O}_X(n,n) = nF_1 + nF_2)$.

Finalmente :

$$0 \to \mathcal{O}(nF_1 + nF_2) \to \mathcal{O}(nF_1 + (n+1)F_2) \to \mathcal{O}_{F_2}(nF_1) \to 0$$

etc ...