ga24

18/11/2021

Dualidad
de Serre

Primero necesitamos un preludio con Ext ...

$(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y los $\mathcal{F}$ serán $\mathcal{O}_X$-módulos.

- $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-módulos $\Rightarrow$

  $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es el grupo de morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos.

  $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es el $\mathcal{O}_X$-módulo asociado al prehaz $\mathcal{U} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$

- Si $\mathcal{F}$ fijo, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \bullet)$ es functor covariante exacto por la izquierda de $\mathrm{Mod}(X)$ a $\mathcal{A}b$.

  $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \bullet)$ % a $\mathrm{Mod}(X)$.

Como $\mathrm{Mod}(X)$ tiene suficientes inyectivos, entonces

$\boxed{\text{Def}}$.- Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado, $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulo. Se definen los functores

$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \bullet)$ = functor derivado derecho de $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \bullet)$

$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \bullet)$ = % de $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \bullet)$

obs.- De esta forma $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$ y $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0$ $\forall i > 0$ si $\mathcal{I}$ es inyectivo.

Prop: $\forall \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X)$ tenemos

(a) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

(b) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ $\forall i > 0$.

(c) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G})$ $\forall i > 0$.

Dem: • $\mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X, \cdot)$ es el functor identidad
$\Rightarrow$ functores derivados son 0 y así (a) y (b) ok.
• $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \cdot) = \Gamma(X, \cdot)$ y así misma cohomología ■

Prop: Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exacta en $\mathrm{Mod}(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X)$, entonces hay sucesión larga exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \cdots$$

y así para $\mathcal{E}xt$.

Dem: $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{I}^\bullet$ inyectiva. Para cada $\mathcal{I}$ inyectivo, tenemos $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{I})$ functor exacto.

$\Rightarrow$ tenemos sucesión corta exacta:
$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{I}^\bullet) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{I}^\bullet) \to 0$$

y luego tomamos la sucesión larga exacta en cohomología. Similar para $\mathcal{E}xt$ ■

Prop. 6.5: Suponer resolución exacta

$$\cdots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

donde los $\mathcal{L}_i$ son loc. libres de rango finito. Entonces $\forall \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X)$,

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq h^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})).$$

Prop. 6.7 : $\mathcal{L}$ localmente libre rango finito
$\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ el dual

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}),$$

$\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X)$.

Teorema : $X = \mathbb{P}^n_k$, k = cuerpo, $\omega_X = \Lambda^n \Omega^1_{X|k} \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$.
Entonces,

(a) $H^n(X, \omega_X) \simeq k$. Fijar un isomorfismo;
(b) Para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X, el natural pairing

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X) \simeq k$$

es un perfect pairing de espacios vect$|_k$ dim finita.
(c) $\forall i \geq 0$, existe un morfismo natural functorial

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

donde $^\vee$ es dual y para $i = 0$ estamos en (b).

"Dem":

(a) Ya sabemos que $\omega_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1-n)$ y por otro lado ya sabemos $H^n(X, \mathcal{O}(-1-n)) \simeq k$.

(b) Dado
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}^\bullet \\ 0 \arrow[r] & \omega_X \arrow[r] & \mathcal{J}^\bullet \end{tikzcd}$$
por inyectivos y así un morfismo entre cohomologías

Ese es el natural pairing.

- Si $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(q)$ con $q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-q-n-1))$$
$$\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(-q-n-1))$$

$\Rightarrow$ usamos el cálculo que ya tenemos para cohomología en $\mathbb{P}^n_k$.

- Para $\mathcal{F}$ arbitrario coherente, usar

$$(*) \qquad \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

con $\mathcal{E}_i = \bigoplus_{\text{finito}} \mathcal{O}_X(q_j)$. Como $\mathrm{Hom}(\_\_, \omega_X)$ y $H^n(X, \_\_)^\vee$ son funtores contravariantes por la izquierda, obtenemos:

naturales

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_0, \omega_X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq\ (\text{anterior})"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \omega_X) \arrow[d, "\simeq\ (\text{anterior})"] \\
0 \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{F})^\vee \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{E}_0)^\vee \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{E}_1)^\vee
\end{tikzcd}$$

romper $(*)$ + Anulación de Grothendieck

$\Rightarrow f \simeq$ por el Lema 5 cosas.

(c) Este es el terrible! Tenemos dos funtores contravariantes:

$$\mathrm{Ext}^i(\_\_, \omega_X) \qquad H^{n-i}(X, \_\_)^\vee$$

tales que:

δ-funtor $\begin{cases} (1) \text{ Dan sucesiones largas en cohomología} \\ (2) \text{ Dan morfismos entre sucesiones exactas largas} \\ \quad \text{a partir de 2 suc. exactas cortas.} \end{cases}$

ambos funtores coinciden en $i=0$ y ambos son <u>universales</u> [usando la propiedad de funtor $\underbrace{\text{borrable}}$, ver Hartshorne para detalles].

$\forall A, \exists \quad M \twoheadrightarrow A \to 0$ con $F(M)=0$ (luego universal)

$\therefore$ La clase es: $\mathcal{F}$ coherente $\Rightarrow$

$$\mathcal{E} := \oplus \mathcal{O}_X(-q) \to \mathcal{F} \to 0 \qquad q \gg 0$$

y (1) $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \omega_X) \simeq \oplus H^i(X, \omega_X(q)) = 0 \quad \forall i > 0$

(2) $H^{n-i}(X, \mathcal{E})^\vee \simeq \oplus H^{n-i}(X, \mathcal{O}(-q))^\vee = 0 \quad \forall i > 0$

$\blacksquare$

El reemplazo de $\omega_{\mathbb{P}^n_k}$ ...

$\boxed{\text{Def}}$.- X = esquema propio sobre k de dim n. Un <u>haz dualizante</u> de X es un haz coherente ω_X° tal que:

(a) $\exists\ t : H^n(X, \omega_X^\circ) \twoheadrightarrow k$ morfismo, y

(b) $\forall \mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(X)$, el natural pairing

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega_X^\circ)$$

seguido por t nos da $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F})^\vee$.

- Si ω_X° existe $\Rightarrow$ es único salvo isomorfismo $\varphi : \omega_X^\circ \xrightarrow{\sim} \omega_X^{\circ\prime}$ y $t = t' \circ H^n(\varphi)$.

[mirar Hartshorne : (ω_X°, t) representa al functor $\mathcal{F} \mapsto H^n(X, \_\_)^\vee$: $\mathrm{Coh}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(k)$]

- ω_X° existe para todo X propio sobre k. Hartshorne lo demuestra para X proyectivo sobre k:

$$\text{Si } X \subseteq \mathbb{P}_k^n \text{ codim } r \Rightarrow \omega_X^\circ := \mathcal{E}xt^r_{\mathbb{P}_k^n}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}_k^n}).$$

[Proposition 7.5]

y [Corollary 7.12]: Si además X es nosingular $\Rightarrow \omega_X^\circ \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$.

Por el general non-sense anterior, tenemos $\forall i \geq 0$ y $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ morfismos naturales

$$\theta^i : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \to H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee,$$

y ambos son δ-functores que coinciden en $i=0$ y $\mathrm{Ext}^i(\_\_, \omega_X^\circ)$ es universal.

[X proyectivo y $\oplus \mathcal{O}_X(-q) \to \mathcal{F} \to 0$ $q \gg 0$ nos daría un $H^i(X, \omega_X^\circ(q)) = 0$ (Serre), no importa ω_X°]

El problema es mostrar que $H^{n-i}(X, \_\_)^\vee$ es universal, y eso pasa bajo ciertas condiciones en X.

[ie Cohen-Macaulay [$\mathcal{O}_{X,p}$ son Cohen-Macaulay $\forall p \in X$] y todos los componentes de igual dimensión]

- Si A es un anillo local Noetheriano, una sucesión $x_1, \dots, x_r \in A$ es regular si x_i no son div cero y x_i no es div de cero en $A/(x_1, \dots, x_{i-1})$.

La profundidad depth(A) es el largo máximo de una sucesión regular. A es Cohen-Macaulay si depth(A) = dim A.

- $Y \subset X$ = no singular ("variedad"), $\mathcal{I}_Y$ = ideal de Y.
  ‖ subesquema cerrado

Y es <u>intersección completa local</u> $\iff$ $\mathcal{I}_Y$ loc. generado por $r = \operatorname{codim}(Y, X)$ en todo punto.

$\therefore$ Y es Cohen-Macaulay, y es normal $\iff$ es regular en codim 1.

<u>Theorem 7.6</u> (Dualidad de Serre para esquemas proyectivos)

X = esquema proy. $|_{k=\bar{k}}$ de dim n.
ω_X° = haz dualizante, $\mathcal{O}_X(1)$ haz muy amplio
Entonces:
(a) $\forall i \geq 0$, $\forall \mathcal{F} \in Coh(X)$ existe

$$\theta^i : Ext^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \longrightarrow H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

donde θ° es el de la definición de ω_X°.
(b) los siguientes son equivalentes:

(i) X Cohen-Macaulay y equidimensional.

(ii) $\forall \mathcal{F}$ loc. libre, $H^i(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ $\forall i < n$, $q \gg 0$.

(iii) θ^i en (a) son isomorfismos $\forall i \geq 0$, $\forall \mathcal{F} \in Coh(X)$.

En particular resulta para X proy nósingular y así

Teo (Dualidad de Serre pedestre)

Si X = var. proy nosing $|_{k=\bar{k}}$ y $\mathcal{F}$ loc. libre en X

$$\Rightarrow \quad H^i(X,\mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(K_X))^\vee.$$

En particular, si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$, entonces:

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(D)) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee.$$

Así para dimensión $n=1$, no sería necesario calcular H^1, y por ejemplo $h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ el cual es género aritmético: Estamos hablando de secciones globales de Ω^1_X !

Para dim $n=2$: no nos salvamos de H^1 pero sí de H^2 y de nuevo $h^2(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ el género geométrico. Resulta que sobre $\mathbb{C}$, $h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\Omega^1_X)$ por teoría de Hodge.

Con un pequeño ajuste se demuestra ..

Cor 7.8 (lema de Enriques - Severi - Zariski) Si X es esquema normal proy de dim ≥ 2 y $\mathcal{F}$ loc. libre, entonces

$$H^1(X,\mathcal{F}(-q)) = 0 \quad \forall q \gg 0.$$

Ejl.- Si $X \subset \mathbb{P}^n_k$ var. no singular $\dim X \geq 2$ y H hipersuperficie $\Rightarrow X \cap H$ es conexa (y así variedad nosingular cuando H sea general (Bertini)).

$$0 \to \mathcal{O}_X(-d) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{H\cap X} \to 0 \quad \text{(no suficiente} \Rightarrow \text{twistear!)}$$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-ed) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{eH\cap X} \to 0 \quad (eH \text{ mismo soporte que } H)$$

$$\therefore \; \underset{k}{\overset{}{}} = H^0(\mathcal{O}_X) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_{eH}) \Rightarrow H^0(\mathcal{O}_{eH}) = k \text{ y así conexo} \blacksquare$$