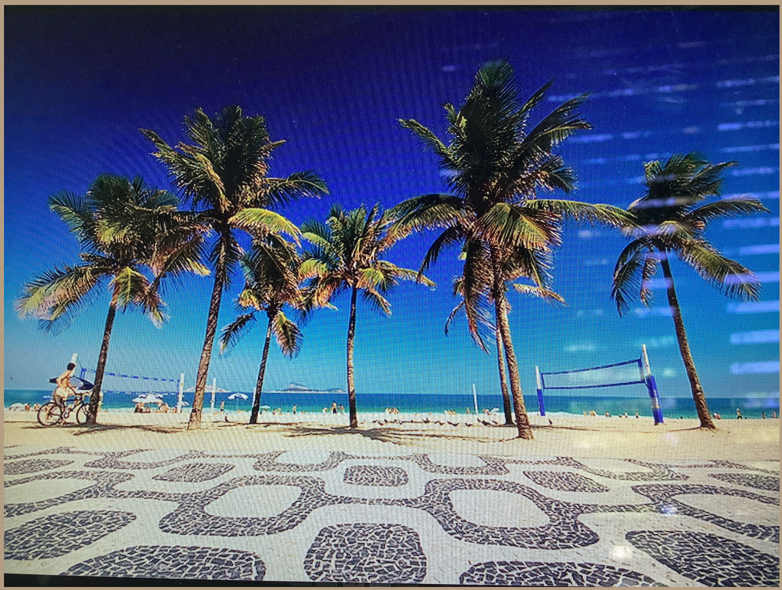


ga25

23/NOV/21

Sene + otros

Cosos

El héroe dualiza.

<u>Theorem 7.11</u>: $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ subesquema cerrado el cual es intersección completa local de codim r. Sea $\mathcal{I}$ el haz de ideales. Entonces:

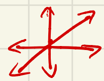
$$\omega_X^\circ \simeq \mathcal{O}_X(-1-n)\otimes \Lambda^r(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee.$$

(mirar adjunción en diferenciales)

En particular ω_X° es un haz invertible.

<u>obs</u>: Si X es no singular, la parte derecha es $\mathcal{O}_X(K_X)$. Si además $r=1$, entonces

$$\omega_X^\circ \simeq \mathcal{O}_X((-1-n)H + dH) = \mathcal{O}_X((d-1-n)H).$$

[Acerca de no int. com. local,  $\mathbb{A}^3_k$ $I=(xy,xz,yz)$
$\Rightarrow$ problema en $(0,0,0)$]

<u>Corollary 7.13</u>:

X = variedad proy. nosingular dim n.
$\Omega^p_X := \Lambda^p\Omega^1_X$ haz de p-formas diferenciales

$$\Rightarrow H^q(X,\Omega^p_X)\simeq H^{n-q}(X,\Omega^{n-p}_X)^\vee$$

$\forall\, p,q \in \{0,1,\dots,n\}$.

dimensiones son los números de Hodge

<u>Dem</u>: (II, Ex. 5.16 b) tenemos $\Omega^{n-p}_X \simeq \Omega^{p\vee}_X\otimes\omega_X$.
(que tarea!)

$\omega_X \simeq \Lambda^n\Omega^1_{X|k}$

y luego $H^{n-q}(X,\Omega^{n-p}_X)^\vee \simeq H^{n-q}(X,\Omega^{p\vee}_X\otimes\omega_X)^\vee$

$$\underset{\text{Serre}}{\simeq} H^q(X,\Omega^p_X)$$ ■

Si $n=1$, $H^1(X,\Omega^1_X) \simeq H^0(X,\mathcal{O}_X)^\vee = k$

Si $n=2$, $H^1(X,\Omega^2_X) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X)^\vee$, etc...

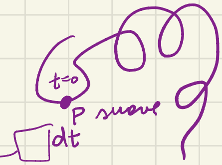
Residuos: Sea

X = curva proy. nosingular $/k=\bar{k}$

K = cuerpo de funciones racionales

Ω^1_X = haz de diferenciales sobre k.

$$\Omega^1_{X,p} = \begin{cases} \Omega^1_p, & P \text{ punto cerrado} \\ \underbrace{\Omega^1_{K|k}}, & \text{punto genérico} \end{cases}$$

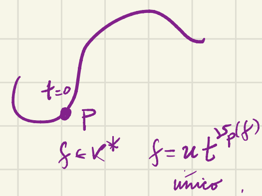


sabemos que es un K-esp. vectorial dim 1. (Toda curva)

Theorem 7.14.1 (Existencia de residuos) Para $p\in X$ punto cerrado, existe un único morfismo k-lineal

$$res_p : \Omega^1_K \longrightarrow k$$

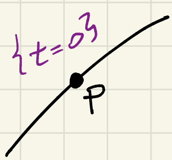
tal que:



(1) $res_p(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in \Omega^1_p$

(2) $res_p(f^n df) = 0 \quad \forall f \in K^*,\ n \neq -1$.

(3) $res_p(\frac{1}{f} df) = v_p(f)\cdot 1$, v_p = valuación en p.



Parámetro $t \Rightarrow dt$ se puede tomar como generador de Ω^1_K.

$\therefore\ \tau \in \Omega^1_K \Rightarrow \tau = g\,dt$

y $g = \sum_{i<0} a_i t^i + h$ con $h \in \mathcal{O}_{X,p}$.

$a_i \in k$

$\therefore$ aplicar (1), (2), (3) y obtener $\mathrm{res}_p(\tau) = a_{-1}$.

Así unicidad es clara, la existencia parece ser más complicada: independencia de parámetro usado.

Ej: $X = \mathbb{P}^1_k$, en carta afín tomar $\underset{f(x) \in k(x)}{f(x)\,dx} \in K(\mathbb{P}^1_k)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{r}(x_i - a_i)} \cdot h(x)\,dx$ con polos de orden superior en otros puntos

$\Rightarrow a_{-1}(f)$ en a_i es $\dfrac{h(a_i)}{\prod_{i \neq j}(a_i - a_j)}$

$\therefore$ cambio coordenadas, $\dfrac{y^r}{\prod_{i=1}^{r}(1 - a_i y)} \cdot h\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{-1}{y^2}\,dy$

y mirar a_{-1} en $y = 0$.

[Digamos $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ $\quad x = 0 : -1$, $\quad x = 1 : +1$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \dfrac{y^2}{1-y}$ y $f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{-1}{y^2}\,dy$ no tiene polo simple en 0.]

Theorem 7.14.2 (Teorema del residuo)

$$\forall \tau \in \Omega^1_{K|k}, \quad \sum_{p \in X} \mathrm{res}_p(\tau) = 0.$$

[Primero se demuestra en $\mathbb{P}^1_k$ explícitamente. Luego el teorema general sigue de $X \to \mathbb{P}^1$ estudiando residuos en X y $\mathbb{P}^1_k$.]

¿Cuál conexión con dualidad de Serre?

- $$0 \to \mathcal{O}_X \to \underset{\substack{\| \\ \text{haz constante} \\ K_X}}{\mathcal{K}_X} \to \mathcal{K}_X/\mathcal{O}_X \to 0 \qquad (*)$$

  es una resolución flasque de $\mathcal{O}_X$.

- $$\mathcal{K}_X/\mathcal{O}_X \simeq \bigoplus_{P\in X} i_*(K_X/\mathcal{O}_P) \qquad i: P \hookrightarrow X \; .$$

- Tensorizar $(*)$ con Ω^1_X,

  $$0 \to \Omega^1_X \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{K}_X \overset{\simeq \Omega^1_K}{} \to \bigoplus_{P\in X} i_*(\Omega^1_K/\Omega^1_P) \to 0$$

  esto deberá ser salvo compatibilidad.

- Tomar cohomología y obtener

  lo mismo

  $$\Omega^1_K \to \bigoplus_{P\in X} \Omega^1_K/\Omega^1_P \to H^1(X, \Omega^1_X) \to 0$$

  const. flasque

  $$\downarrow$$

- Considerar k que es la suma $\sum \operatorname{res}_P$ (lo cual es esencialmente suma finita, necesito compatibilidad) (suma directa, solo finitos no cero).

- Pero Teor. del residuo dice pasa al cociente

  $$\Rightarrow \quad \bigoplus_{P\in X} \Omega^1_K/\Omega^1_P \Big/ \Omega^1_K \simeq H^1(X, \Omega^1_X)$$

  $$\downarrow$$

  $$k$$

  τ es el t de la dualidad que termina siendo $\simeq$.

Teoremas de anulación son bien importantes.

<u>Teorema</u> (Kodaira Vanishing) ± 1950: Digamos que $k = \mathbb{C}$.

Sea X = variedad proyectiva nosingular$|_{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{L}$ un haz invertible amplio.

$$\Rightarrow \quad H^i(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0 \quad \forall i < n = \dim X.$$

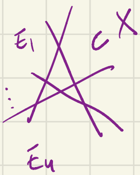
[La demostración involucra la topología analítica inducida por $\mathbb{C}$, y no es cierto en char $p>0$]

Por 1982 e independientemente, Y. Kawamata y E. Viehweg prueban una generalización en $\mathcal{L}$.

Lo siguiente es el punto de vista de Viehweg:

<u>Teorema</u>: X = variedad proyectiva nosingular$|_{\mathbb{C}}$

$E = \sum_{i=1}^{r} \nu_i E_i \quad \nu_i \geq 0$ ($\nu_i \in \mathbb{Z}$) y $\sum_{i=1}^{r} E_i$ SNC divisor



Asumir existen $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ invertibles y $n > 0$ entero tal que

$$\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i E_i\right)$$

con $\mathcal{M}^{\dim X} > 0$ y $\mathcal{M} \cdot C \geq 0$ $\forall$ curva C
(big & nef)

Sea $\mathcal{L}^{(i)} := \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{O}_X\left(-\sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\nu_j i}{n}\right] E_j\right)$

donde $[\ \ ]$ = parte entera.

$$\Rightarrow \quad H^p(X, \mathcal{L}^{(i)} \otimes K_X) = 0 \quad \forall p > 0, \ \forall i > 0.$$

Su demostración tiene que ver con ceros de elementos cíclicos, como los vistos anteriormente y comparación entre cohomologías...

Higher direct images: Sea $f: X \to Y$ un morfismo entre esquemas. Queremos comparar cohomologías entre ellos, al menos iniciarlo!

$\boxed{\text{Def}}$.- Dado $f: X \to Y$ entre espacios topológicos, se definen los $R^i f_*$ como los functores derivados derechos de $f_*(\text{—})$.

Prop: $\forall i \geq 0$ y $\mathcal{F} \in Ab(X)$, $R^i f_*$ es el haz asociado al pre-haz en Y

$$\mathcal{U} \mapsto H^i(f^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{F}|_{f^{-1}(\mathcal{U})}).$$

Dem: Ver Hartshorne, es acerca de comparar functores donde para $i=0$ $f_* \mathcal{F} = \mathcal{H}^0(X, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{F})$ es el sheaf asociado. En inyectivos es cero, así tendremos isomorfismo de functores.

Prop: Si X es esquema Noetheriano y $f: X \to Y = \operatorname{Spec}(A)$. Entonces $\forall \mathcal{F} \in QCh(X)$

$$R^i f_* \mathcal{F} \simeq H^i(X, \mathcal{F})^\sim.$$

Dem: De nuevo δ-functores universales.

[En ese caso, $f_* \mathcal{F}$ y $R^i f_* \mathcal{F}$ son cuasi-coherentes.]