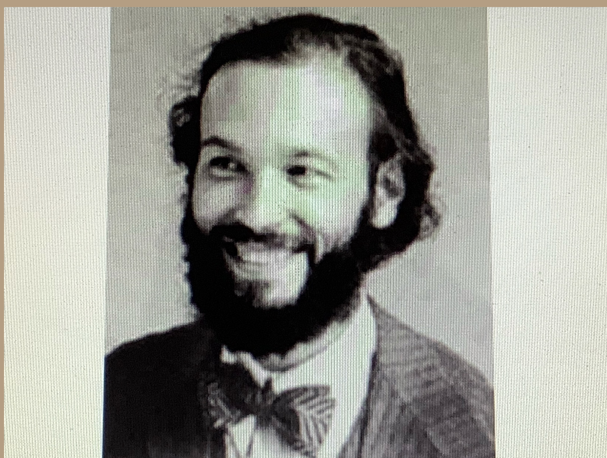
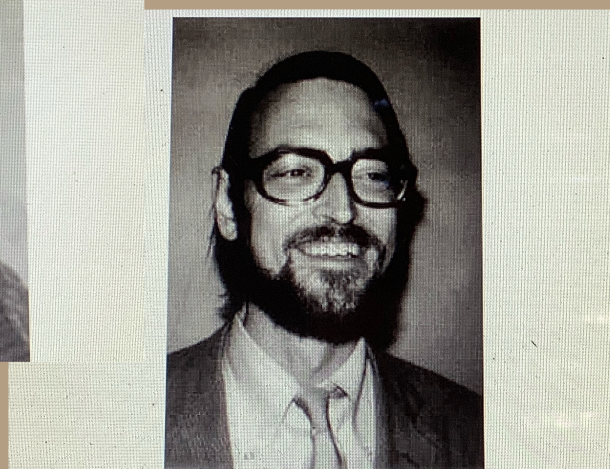


Deligne



Mumford

$\overline{M}_g$

ga26

25/NOV/21

Final / inicio

curvas

- X = curva proyectiva nosingular $|_{k=\bar{k}}$
  Ω^1_X = haz diferenciales $\simeq \mathcal{O}_X(K_X)$
- Tenemos puntos cerrados y el punto genérico.
  $$p_g(X) = \text{género geométrico} = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X(K_X)).$$
  $$\begin{array}{l} \parallel \\ p_a(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) =: g(X) \end{array}$$

- Un divisor de Weil D es $n_1P_1 + \cdots + n_rP_r$, P_i puntos cerrados y $n_i \in \mathbb{Z}$. Tenemos:
  $$\begin{aligned} Cl(X) &\xrightarrow{\sim} Pic(X) \\ [D] &\longmapsto [\mathcal{O}_X(D)] \end{aligned}.$$

- Un $D = \sum r_i P_i$ con $r_i \geq 0$ se llama efectivo, y dado $D \in Div(X)$,
  $$|D| = \{E \text{ efectivo} : E \sim D\} \quad (\text{sistema lineal completo})$$
  $$\begin{array}{c} ||| \\ \left(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\} / k^*\right) \simeq \mathbb{P}_k^{h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - 1} \end{array}$$

$E = div(f) + D \geq 0$

$\nwarrow$ finito

<u>Lema</u>: $D \in Div(X)$. Si $h^0(D) \neq 0 \Rightarrow gr(D) \geq 0$.
Si $h^0(D) \neq 0$ y $gr(D) = 0 \Rightarrow D \sim 0$ ie $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$.

<u>Dem</u>:

- Si $h^0(D) \neq 0 \Rightarrow \exists E \geq 0$, $E \sim D \Rightarrow gr(D) \geq 0$.

- Si $\mathrm{gr}(D)=0 \Rightarrow E=0$ ■

<u>Teorema</u> (Riemann-Roch): $D\in \mathrm{Div}(X)$, entonces

$$h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) - \underset{\substack{\text{Serre}\\ \| \\ h^1(X,\mathcal{O}_X(D))}}{h^0(X,\mathcal{O}_X(K_X-D))} = \mathrm{gr}(D)+1-g(X).$$

<u>Dem</u>: Por dualidad de Serre, necesitamos probar:

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(D)) = \mathrm{gr}(D)+1-g(X).$$

- Para $D=0$, tenemos $h^0(X,\mathcal{O}_X)=1$ $h^0(X,\mathcal{O}_X(K_X))=g(X)$.
- Sea D divisor cualquiera, $P\in X$ punto cerrado. Se probará: R-R vale para $D \overset{+}{\underset{-}{\Longleftrightarrow}}$ vale para $D+P$.
- Tenemos

$$0\to \mathcal{O}_X(-P)\to \mathcal{O}_X \to k(P)\to 0$$

y $\otimes\, \mathcal{O}_X(D+P)$,

$$0\to \mathcal{O}_X(D)\to \mathcal{O}_X(D+P)\to k(P)\to 0$$

- Característica de Euler es aditiva y $\chi(k(P))=1$

$$\Rightarrow \quad \chi(\mathcal{O}_X(D))+1 = \chi(\mathcal{O}_X(D+P))$$ ■

[dim 2: $\chi(X,\mathcal{O}(D)) = \underline{D\cdot(D-K_X)} + \chi(X,\mathcal{O}_X)$]

$$D\cdot D' = \chi(\mathcal{O}) - \chi^2(*) - \chi(1) + \chi(2)$$ [Beauville]

[observar que así $\mathrm{gr}(D) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) - \chi(\mathcal{O}_X)$]

obs: Si $X \subset \mathbb{P}^n$ de grado d y $\mathcal{O}_X(n)$ es el haz muy amplio $\otimes n$

$$\Rightarrow \quad \chi(\mathcal{O}_X(n)) = \text{Pol. Hilbert} = nd + 1 - g(X).$$

obs: Si $gr(D) < 0 \Rightarrow \dim|nD| = -1 \quad \forall n > 0$.

Si $gr(D) = 0 \Rightarrow \dim|nD| = \begin{cases} 0 & nD \sim 0 \\ -1 & \text{no} \end{cases}$

Si $n\, gr(D) > gr(K_X) \Rightarrow h^1(\mathcal{O}_X(D)) = 0$, y así

$$\dim|nD| = n\, gr(D) - g(X) \quad \text{si } n >> 0.$$

Ejemplo: $h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) - h^0(\mathcal{O}_X) = gr(K_X) + 1 - g(X)$

$$\Rightarrow \quad g(X) - 1 = \text{''} \Rightarrow gr(K_X) = 2g(X) - 2.$$

Ejemplo: Si $g(X) = 0 \Rightarrow X \simeq \mathbb{P}^1$.

$P \in X$, $\quad h^0(\mathcal{O}_X(P)) - h^0(\mathcal{O}_X(\underbrace{\cancel{K_X}}_{0} - P)) = 1 + 1 - 0 = 2$

$\therefore \quad h^0(\mathcal{O}_X(P)) = 2 \Rightarrow \exists f$ no constante en $K(X)$ tal que $div(f) + P \geq 0$

$\Rightarrow f$ tiene un polo en P.

$\Rightarrow f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ morfismo regular con $gr = 1$ (ya viene) y así $X \simeq \mathbb{P}^1$.

$\mathcal{O}_X(P+P') \simeq \mathcal{O}_X^{(2)} \mathcal{O}_X(P) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ $\qquad \Gamma(\underbrace{\mathcal{O}_X(P)}_{div(1)+P \geq 0}) \simeq \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = kx + ky$

Prop: Dado $f : X \to Y$, X = curva nosing. proy., Y = curva irred cualquiera, entonces pasa

(1) $f(X)$ = punto, o

(2) $f(X) = Y$. En este caso $K(X)$ es extensión finita de $K(Y)$, f es morfismo finito e Y es proyectiva.

Dem: Como X proyectiva $\Rightarrow f(X)$ es proyectiva e irreducible, así (1) $f(X)$ punto o (2) $f(X) = Y$.

$k \subset k(t) \underbrace{\subset}_{\text{finita}} K(X)$

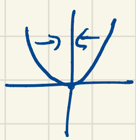
- Para el caso (2), tenemos $K(Y) \subset K(X)$ al ser f dominante.
- Como ambos cuerpos son extensiones f.g de algún $k(t)$, entonces $K(X)$ debe ser ext. finita de $K(Y)$.
- Sea $V = \operatorname{Spec} B \subset Y$ y $A = \overline{B}$ en $K(X)$
  $\Rightarrow A$ es B-módulo f. g., y $\operatorname{Spec}(A)$ es un abierto de X. [Ch. I §6, Hartshorne] ■

$\boxed{\text{Def}}$.- El grado de un morfismo finito $f: X \to Y$ de curvas es $[K(X) : K(Y)]$.

Ej: $X = Y = \mathbb{P}^1_k$, $f[x,y] = [x^2, y^2]$.

$\therefore$ a nivel de $\mathbb{A}^1_t$, $k[t] \longrightarrow k[u]$, $t \mapsto u^2$
$\Rightarrow k(t) \subset k(u)$ en grado 2 ya que $u^2 = t$

localmente $k[x,y]/(y - x^2) \longrightarrow k[y]$ $\quad (x,y) \mapsto y$



$\therefore \quad \mathbb{A}^1_x \longrightarrow \mathbb{A}^1_t$, $\quad x \mapsto x^2 = t$

Si $\operatorname{car}(k) \neq 2 \Rightarrow 2$ pre-imagenes excepto en $t = 0$
$\operatorname{car}(k) = 2 \Rightarrow 1$ pre-imagen en todas partes.

$\boxed{\text{Def}}$.- (Índice de ramificación) Sea $f: X \to Y$ como antes y $Q = f(P)$. Sea $t \in \mathcal{O}_{Y,Q}$ parámetro local.

$$f^\# : \mathcal{O}_{Y,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

entonces $f^\#(t) \in \mathcal{O}_{X,P}$ y tiene orden $v_P(f^\#(t))$.
El <u>índice de ramificación</u> es $e_P :=$

Ej: ... $f^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,t} = k[t]_{(t)} \longrightarrow k[x]_{(x)}$ $\Rightarrow e_0 = 2$
$t \mapsto x^2$

$f^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1, t-\alpha} \longrightarrow k[x]_{(x-\sqrt{\alpha})}$ $\Rightarrow e_\alpha = 1$
$t-\alpha \mapsto x^2-\alpha = (x-\sqrt{\alpha})\underbrace{(x+\sqrt{\alpha})}_{\text{unidad}}$

Si char $= 2 \Rightarrow e_P = 2 \ \forall P \in X$.

$\boxed{\text{Def}}$: Si $e_P > 1 \Rightarrow f$ está <u>ramificada</u> en P y Q es un <u>branch point</u> de f. Si $e_P = 1 \ \forall P \Rightarrow f$ se llama <u>étale</u>.

Si char $k = 0$ o char $k = p > 0$ y $p \nmid e_P \Rightarrow P$ es <u>tame</u> (doméstico); si $p \mid e_P \Rightarrow P$ es <u>wild</u> (salvaje).

Se puede definir el homomorfismo

$$f^*: \mathrm{Div}(Y) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$$
$$f^*(Q) = \sum_{P \to Q} e_P P$$
y extender lineal.

- Tenemos $f^*(\mathcal{O}_Y(D)) \simeq \mathcal{O}_X(f^*(D)) \Rightarrow f^*: \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$.
- (Ver Prop. 2.2) $f: X \longrightarrow Y$ finito y separable (extensión $K(Y) \subset K(X)$ separable):

divisor de ramificación $= R := \sum_{P \in X} \mathrm{long}(\Omega_{X/Y,P})\, P$

donde :

(1) largo $\neq 0$ para finitos puntos e igual a $v_P\left(\frac{dt}{du}\right)$.

(2) P tame $\Rightarrow$ largo $= e_P - 1$.

(3) P wild $\Rightarrow$ largo $> e_P - 1$.

y

<u>Prop 2.3</u>: $K_X \sim f^*(K_Y) + R$.

<u>Cor</u> (Hurwitz): Si $f: X \longrightarrow Y$ es un morfismo separable finito entre curvas y $n = \mathrm{gr}(f)$, entonces:

$$\boxed{2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \mathrm{gr}(R)}$$

Si f tiene sólo ramificación tame $\Rightarrow$ $\mathrm{gr}(R) = \sum_{P \in X} (e_P - 1)$.

<u>obs</u>/- El caso inseparable es tratable y hay composición de morfismos de Frobenius...

<u>obs</u>/- Caso separable $\Rightarrow$ $\mathrm{gr}(R)$ es par.

<u>Ej</u>: Suponer que $\exists\, X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ étale. No puede tener parte inseparable $\Rightarrow$ Hurwitz vale y

$$2g(X) - 2 = -2n$$

$\Rightarrow$ $g(X) = 0$ y $n = 1$, y así $X \simeq \mathbb{P}^1$.

$\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^1) = \{1\}$

<u>Ej</u>/- Si $f: X \to Y$ finito $\Rightarrow$ $g(X) \geq g(Y)$.
Se reduce a separable, ya que la otra parte hace que géneros sean iguales.

Si $g(Y)=0 \Rightarrow$ ok. Asumir $g(Y) \geq 1$

$$\therefore \quad g(X) = g(Y) + \underbrace{(n-1)}_{\geq 0}\underbrace{(g(Y)-1)}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{gr}(R)}_{\geq 0}.$$

Ejl.- (Lüroth's) Si $k=\bar{k} \subset L \subset k(t) \Rightarrow L \simeq k(u)$.

Eso se traduce a $L = K(X)$ curva y $f: \mathbb{P}^1 \to X$
$\Rightarrow g(X)=0$ y por R-R $X \simeq \mathbb{P}^1 \Rightarrow L \simeq k(u)$.

Ejl.- (Ex. 2.5) Automorfismos de curvas.

<u>Teorema</u> (Hurwitz) Si $\operatorname{car}(k)=0$ y $g(X) \geq 2$
$\Rightarrow |\operatorname{Aut}(X)| \leq 84(g(X)-1)$.

El primer paso será controlar la fórmula de Hurwitz:

$$\begin{array}{ccc} \times P_1 & & \\ \times P_2 & & X \\ \vdots & & \Big\downarrow f \\ \times P_r & & \\ \downarrow & & X/G = Y \\ \times Q & & \end{array}$$

$\Rightarrow e_{P_i} = e_{P_j} \;\; \forall i,j$ sobre un Q

$$\Rightarrow \quad 2g(X)-2 = |G|(2g(Y)-2) + \sum_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|G_i|}(|G_i|-1)$$

donde los G_i son estabilizadores sobre cada Q_i en el branch $Q_1 + \dots + Q_s$.

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{2g(X)-2}{|G|} = 2g(Y)-2 + \sum_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right)$$

y seguir jugando con enteros positivos ...

Ejl.- Cuártica de Klein $\{x^3y+y^3z+z^3x=0\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ...