ga 3

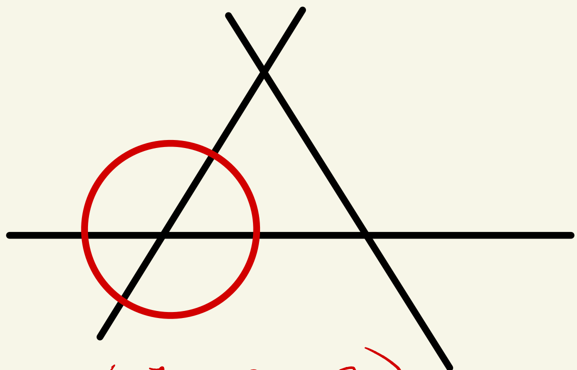
23/8/21

morgismos

ya tenemos los objetos:

conjuntos algebraicos afines/proyectivos

y las variedades (y las cuasi)



$Z(x^2+y^2-z^2)$

ahora las flechas ...

§3. Morfismos.

Def: Y = variedad cuasi afín en $\mathbb{A}^n_k$. Una función $f: Y \to k$ es <u>regular</u> en $p \in Y$ si existe $\mathcal{U}$ abierto, $p \in \mathcal{U}$ y polinomios $g, h \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $h \neq 0$ en $\mathcal{U}$ y $f = \frac{g}{h}$ en $\mathcal{U}$. Es regular en Y si lo es $\forall p \in Y$.

<u>Lema</u>: La correspondiente $f: Y \to \mathbb{A}^1_k$ es continua.

<u>Dem</u>:
- Basta con que $f^{-1}(a)$ cerrado $\forall a \in \mathbb{A}^1_k$.
- Basta con que $\mathcal{U} \cap f^{-1}(a)$ sea cerrado
- Si $f = \frac{g}{h}$ en $\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cap f^{-1}(a) = \{p \in \mathcal{U} : g(p) = a h(p)\}$ ∎

Def: Y = variedad cuasi-proyectiva en $\mathbb{P}^n_k$. Una función $f: Y \to k$ es <u>regular</u> en $p \in Y$ si $\exists\, \mathcal{U}$ abierto, $p \in \mathcal{U}$ $g, h \in S = k[x_0, \dots, x_n]$ del mismo grado y homogeneos, $h \neq 0$ en $\mathcal{U}$ tal que $f = \frac{g}{h}$ en $\mathcal{U}$. Regular en Y si lo es $\forall p$.

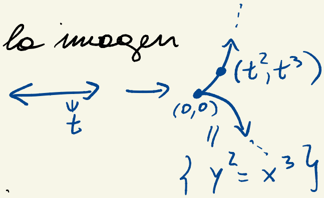
- También continuas para $Y \to \mathbb{A}^1_k$.
- f, g regulares en Y y $f = g$ en algún abierto $\mathcal{U} \subset Y \Rightarrow f = g$ en Y. Esto porque $\{f = g\}$ es cerrado y cont $\mathcal{U}$ y $\overline{\mathcal{U}} = Y$.

Def: Sea $k = \bar{k}$ (en ese caso hablaremos de variedad sobre k). Sean X, Y variedades sobre k. Un <u>morfismo</u> es una función continua $\varphi: X \to Y$ tal que $\forall\, V \subseteq Y$ abierto y $f: V \to k$, la función $f \circ \varphi$ es regular.

- Composición es morfismo, $\mathbb{1}$ lo es.
- <u>isomorfismo</u> $X \xrightarrow{\varphi} Y$ tal que $\exists\, \psi: Y \to X$ morfismo con $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_Y$ y $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_X$.
  $(X \underset{isom}{\simeq} Y)$

Por supuesto, esto declara la gran batalla sobre qué variedades son isomorfos entre ellos.

obs: (1) $\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ no es isomorfismo en la imagen



ni tampoco existe tal isomorfismo!

(2) char $k = p$, $\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^p$ Frobenius no es isomorfismo. (Por supuesto $\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{A}^1$:))

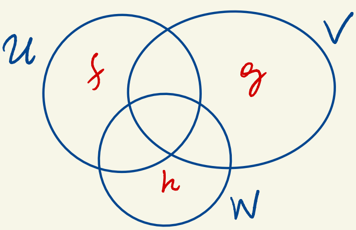
ambos biyectivas bicontinuas

$\boxed{\text{Def}}$: Y = variedad. Sea $\mathcal{O}(Y) :=$ anillo de todos las funciones regulares en Y

Sea $p \in Y$ punto $\Rightarrow$

$$\mathcal{O}_{p,Y} := \left\{ \langle \mathcal{U}, f \rangle : \underset{\text{abierto}}{\mathcal{U} \ni p},\ f \text{ reg en } \mathcal{U} \right\} \Big/ \langle \mathcal{U}, f\rangle \sim \langle V, g\rangle \text{ si } f = g \text{ en } \mathcal{U} \cap V$$

(anillo de funciones regulares en Y cerca de p)



$f = g$ en $\mathcal{U} \cap V$, $g = h$ en $V \cap W$ $\Rightarrow$ $f = h$ en $\mathcal{U} \cap V \cap W$ $\Downarrow$ $f = h$ en $\mathcal{U} \cap W$

$\mathcal{O}_{p,Y}$ es anillo local: $\mathfrak{m} = \{ f \in \mathcal{O}_{p,Y} : f(p) = 0 \}$ es único ideal max, y tenemos $\mathcal{O}_{p,Y}/\mathfrak{m} \simeq k$.

$$K(Y) := \left\{ \langle \mathcal{U}, f \rangle : \underset{\text{abierto}}{\mathcal{U} \neq \emptyset},\ f \text{ regular en } \mathcal{U} \right\} \Big/ \langle \mathcal{U}, f\rangle \sim \langle V, g\rangle \text{ si } f = g \ \mathcal{U} \cap V$$

(cuerpo de funciones racionales en Y)

Por ejemplo:

- Y es irreducible, así $\mathcal{U}\cap V \neq \phi$. Luego

$$\langle \mathcal{U}, f\rangle + \langle V, g\rangle = \langle \mathcal{U}\cap V, f+g\rangle \quad (\text{mismo para} \cdot)$$

- Si $\langle \mathcal{U}, f\rangle \in K(Y)$ con $f \not\equiv 0$, $V := \mathcal{U} \setminus Z(f)$
  $\Rightarrow$ su inverso es $\langle V, \frac{1}{f}\rangle$. El $1 := \langle Y, 1\rangle$
  y el $0 := \langle Y, 0\rangle$.

- Así tenemos

$$\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}_{p,Y} \subset K(Y) \quad \text{para todo } p\in Y.$$

invariantes de la variedad!

Podemos decir concretamente quienes son:

<u>Teorema</u>: $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ variedad afín, $A(Y) = A/_{I(Y)}$. Entonces,

(a) $\mathcal{O}(Y) \simeq A(Y)$ como k-álgebras.

(b) $\forall p \in Y$, sea $\mathfrak{m}_p = \{ f \in \mathcal{O}(Y) : f(p) = 0\}$. Entonces

$$\{p \in Y\} \underset{p \mapsto \mathfrak{m}_p}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}} \{\text{ideales max de } \mathcal{O}(Y)\}$$

(c) $\forall p \in Y$, $\mathcal{O}_{p,Y} \simeq A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$ y $\dim \mathcal{O}_{p,Y} = \dim Y$.

[Recuerdo (AM p.36): A anillo, S conjunto cerrado bajo $\cdot$ y $1 \in S$
$\Rightarrow S^{-1}A = \{\frac{a}{s} : a \in A, s \in S\} / \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Leftrightarrow \exists u \in S,\ u(as' - a's) = 0$ → transitivo
(localización en S) $\quad \therefore (S^{-1}A, \cdot, +)$ es anillo conmut. con 1. $\quad S_{\mathfrak{p}}$
$0 \in S \Rightarrow$:C / A dominio, $S = A\setminus\{0\} \Rightarrow S^{-1}A = K(A)$ / $S = A \setminus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo
$f \in A$, $S = \{f^n : n \geq 0\} \Rightarrow S^{-1}A = A_f$ = funciones regulares en $\mathcal{U}_f = \{f \neq 0\}$
Prop. Universal: $A \xrightarrow{g} B$ homomorfismo con $g(s)$ unidad $\forall s \in S$
$\Rightarrow \exists!\ S^{-1}A \xrightarrow{h} B$ completando
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g"'] & S^{-1}A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$
]

(d) $K(Y) \simeq K(A(Y))$ y así $K(Y)$ es una f.g. extensión de k con grado de trascendencia $= \dim Y$.

Ejemplo : $Y = \{y^2 = x^3\} \subset \mathbb{A}^2_k \Rightarrow A(Y) = k[x,y]/(y^2-x^3) \simeq k[t^2,t^3]$

$K(Y) \simeq k(t)$

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & & k[t^2,t^3] \\ \cup & & \cup \\ (\bar{x},\bar{y}) & \longleftrightarrow & (t^2,t^3) \end{array}$$

$$\underset{k(t)}{\mathbb{A}^1_t} \xrightarrow[\not\simeq]{\quad\sim\quad} \underset{k(t)}{\{y^2 = x^3\}} \ \ldots$$

$t \mapsto (t^2,t^3)$

$\Rightarrow k[x,y] \longrightarrow k[t] \Rightarrow A(Y) \simeq k[t^2,t^3]$

$x \mapsto t^2$

$y \mapsto t^3$

- Caso proyectivo : $S = \underset{= k[x_0,\ldots,x_n]}{\text{anillo graduado}} = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$

  $\mathfrak{p} \subset S$ ideal primo homogeneo

  $\Rightarrow S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{F}{G} : gr(F) = gr(G), \text{ homogeneos}, G \notin \mathfrak{p} \right\} \subset T^{-1}S$

  con T = homogeneos en S no en $\mathfrak{p}$.

  - $S_{(\mathfrak{p})}$ es anillo local con $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}T^{-1}S) \cap S_{(\mathfrak{p})}$.
  - Si S dominio, $S_{(\{0\})}$ = cuerpo
  - $f \in S \Rightarrow S_{(f)} \subset S_f$ son los elementos de grado cero.

Teorema : $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ variedad proyectiva con $S(Y) = S/I(Y)$. Entonces,

(a) $\mathcal{O}(Y) \simeq k$

(b) Si $\mathfrak{m}_p = \{ f \in S(Y) \text{ homog t.q. } f(p) = 0 \} \Rightarrow \mathcal{O}_{p,Y} \simeq S(Y)_{(\mathfrak{m}_p)}$

(c) $K(Y) \simeq S(Y)_{(\{0\})}$.

Dem : solo la parte (a)

- Si $f \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow$ como $A(Y_i) \simeq S(Y)_{(x_i)}$ $\left[\begin{array}{l} Y_i = \mathcal{U}_i \cap Y \\ \mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \end{array} \right]$

  $\Rightarrow f = \dfrac{g_i}{x_i^{N_i}} \quad g_i \in S(Y)_{N_i}$

  $\Rightarrow x_i^{N_i} f \in S(Y)_{N_i} \ \forall i$.

• Asumir (b), (c) y pensar en $\mathcal{O}(Y) \subset K(Y) \simeq S(Y)_{(\{0\})} \subset K(S(Y))$

$$\cup$$
$$S(Y)$$

$\therefore \quad x_i^{N_i} f \in S(Y)_{N_i}$, elegir $N \geq \sum N_i \Rightarrow S(Y)_N f \subset S(Y)_N$

(algún monomio tiene x_i^{α} con $\alpha > N_i$ y ellos generan)

• Luego $S(Y)_N \cdot f^q \subseteq S(Y)_N \quad \forall q \geq 0$.

• En particular, $x_0^N f^q \in S(Y) \ \forall q \geq 0$.

$\Rightarrow \quad S(Y)[f] \subset x_0^{-N} S(Y)$ lo cual es un f.g. $S(Y)$-módulo

• Como $S(Y)$ es un anillo Noetheriano, todo submódulo de un f.g. $S(Y)$-mod es f.g $\Rightarrow f$ es integral sobre $S(Y)$.

• Así, $\exists\ a_1, \dots, a_m \in S(Y)$ tales que

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

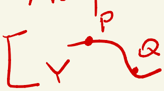
• Como grado de f es cero $\Rightarrow$ podemos reemplazar los a_i por su comp. de grado cero. Pero $S(Y)_0 = k \Rightarrow a_i \in k$
$\Rightarrow f$ es algebraica sobre k. Pero $k = \overline{k} \Rightarrow f \in k$ ∎

obs:

(1) $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ variedad proyectiva $(k = \overline{k})$. Entonces para $F \in S$ homogeneo no constante y $\dim Y \geq 1 \Rightarrow \{F = 0\} \cap Y \neq \emptyset$.

[dem: $P, Q \in Y$ (Si $Y =$ pto $\Rightarrow \dim Y = 0$) y G forma lineal $G(P) = 0$, $G(Q) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{G^{\deg(F)}}{F} \in \mathcal{O}(Y)$ no constante $\rightarrow\leftarrow$]

(2) No podemos tener Y proy $\subset Z$ afín, $\dim Y \geq 1$

[

y en Z plano por P, no Q, $\Rightarrow \mathcal{O}(Y)$ no const $\rightarrow\leftarrow$]

curvas proy. $\subset M_g$

$$Y \subset Z \subseteq \mathbb{A}^n_k$$

var afín $\quad \cup \quad H =$ plano $\quad H(P) = 0$, $H(Q) \neq 0$

$H|_Y$ función no const.

Prop: $k = \bar{k}$, X = variedad, Y = variedad afín

$$\Rightarrow \quad \alpha : \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\text{biyección}} \mathrm{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X))$$

(morfismos de var) (homom. de k-álgebras)

[$X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^n_k$, $Y \xrightarrow{F} k$, $(F_1, \dots, F_n)$ $\therefore$ $\alpha(\varphi)(F) = F \circ \varphi$

$k[x_1, \dots, x_n]/I(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$, $x_i \mapsto F_i$

mirar Prop. 3.5 Hartshorne]

Cor: X, Y variedades afines. Entonces,

$$X \simeq Y \iff A(X) \underset{k\text{-álg}}{\simeq} A(Y).$$

Cor: Existe una equivalencia de categorías a través de un functor contravariante:

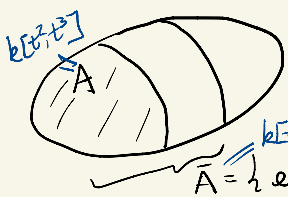
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{variedades} \\ \text{afines sobre } k \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k\text{-álg f.g.} \\ \text{y dominio} \end{array} \right\}$$

$$X \longmapsto A(X)$$

Teorema extra: A = dominio y k-álg f.g sobre k

$K(A) \subset L$ extensión finita

$\Rightarrow$ la clausura integral de A en L es un A-mod. f.g. y también k-alg. f.g.

[

$K(A) = k(t)$ $\quad y^2 = x^3$ $\quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x$ $\quad t$!

$k[t] \supset k[t^2, t^3] = A$

$\bar{A} = \{$elem. int sobre $A\}$

$\bar{A} = A(Y_{norm})$, $A = A(Y)$

y tenemos

$= Y_{norm} \longrightarrow Y =$ $(0,0)$]