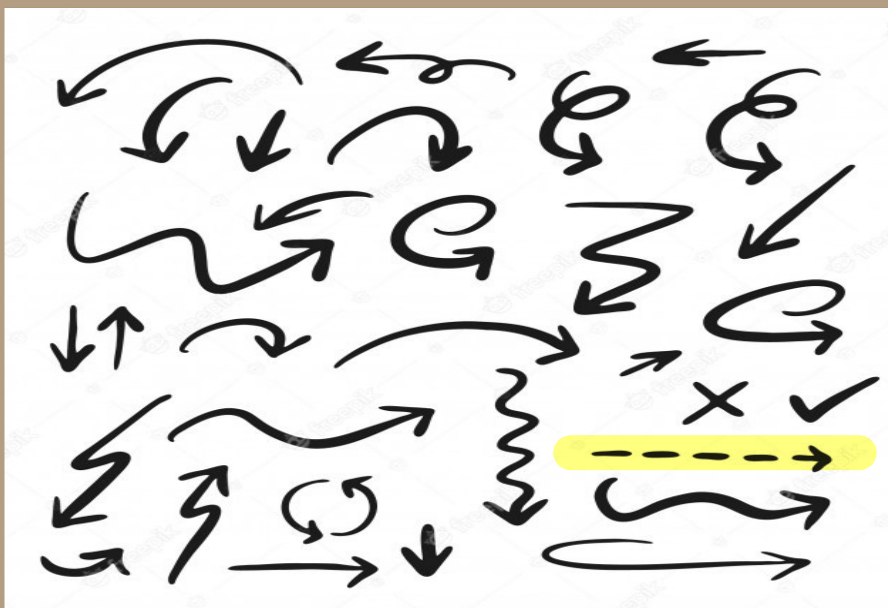


ga 4

25/8/21

Aplicaciones racionales

§4. Aplicaciones racionales

Lema: $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ morfismo entre variedades. Asumir $\exists\ \emptyset \neq \mathcal{U} \subset X$ abierto tq $\varphi|_{\mathcal{U}} = \psi|_{\mathcal{U}} \Rightarrow \varphi = \psi$.

Dem
- Asumir $Y = \mathbb{P}^n$. Recordar que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ es var. proy. a través de Corrado Segre (de la scuola).
- Luego tenemos morfismo $X \xrightarrow{\varphi \times \psi} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, y $\Delta = \{(p,p) : p \in \mathbb{P}^n\} = Z(x_i y_j = x_j y_i \mid i,j = 0,1,\dots,n)$
- Luego $\varphi \times \psi(\mathcal{U}) \subseteq \Delta =$ cerrado $\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \varphi \times \psi^{-1}(\Delta)$ cerrado en X irreducible $\Rightarrow \varphi \times \psi^{-1}(\Delta) = X \Rightarrow \varphi = \psi$.

$\boxed{\text{Def}}$: X, Y variedades sobre k. Una <u>aplicación racional</u>

$$\varphi : X \dashrightarrow Y$$

es una clase de equivalencia $\langle \mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}} \rangle$ $\mathcal{U}$ abierto $\neq \emptyset$ en X, $\varphi_{\mathcal{U}} = \varphi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow Y$ morfismo, y

por lema

$\langle \mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}} \rangle \sim \langle V, \varphi_V \rangle$ si $\varphi_{\mathcal{U}} = \varphi_V$ en $\mathcal{U} \cap V$. Se dice <u>dominante</u> si $\exists \langle \mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}} \rangle$ con $\varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ denso en Y.

Con esto formamos nueva categoría de variedades y aplicaciones racionales: composición está OK. Sus isomorfismos son ...

$\boxed{\text{Def}}$: Una aplicación racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ es <u>birracional</u> si $\exists\ \psi : Y \dashrightarrow X$ racional con $\psi \circ \varphi = 1\!\!1_X$, $\varphi \circ \psi = 1\!\!1_Y$. En ese caso decimos que X e Y son birracionales.

$X \underset{\text{bir}}{\simeq} Y$.

Ej: nuestro viejo amigo $\{y^2 = x^3\} =: \mathcal{L}$ es biracional a $\mathbb{A}^1_k$ ya que la inversa de $\mathbb{A}^1_k \longrightarrow \{y^2 = x^3\}$, $t \longmapsto (t^2, t^3)$ es aplicación racional y valen las identidades.

Sabemos por otro lado que NO son isomorfos.

También: $\{y^2 = x^2(x-1)\} =: \alpha \underset{\text{bir}}{\simeq} \mathbb{A}^1_k$ pero $\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$ no lo es si $\lambda \neq 0, 1$.

$y = tx$ ⇝ parametrizar $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow \alpha$

$\underset{\text{bir}}{\not\simeq} \mathbb{A}^1_k$ (no parametrizable por pol.)

Grandes problemas: Una variedad biracional a $\mathbb{A}^n_k$ se dice <u>variedad racional</u>. En dim 1 y 2 lo entendemos bien, en dimensiones mayores es un tema de investigación.

Ej: Juguemos con Giuseppe Veronese (de la scuola).

[Hart. Ex 2.12, Ex 2.13]

$$\mathbb{P}^2_{x,y,z} \xrightarrow{f_1} \mathbb{P}^5 \quad [x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz]$$

$\therefore f_1(\mathbb{P}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ "la superficie de veronese".

Digamos $V = f_1(\mathbb{P}^2) \supset \Gamma$ curva

$\Rightarrow \exists H,\ H \cap V = \Gamma$.

Idea: $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ $\Gamma = \{F_d = 0\}$ ← homo grado d.

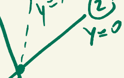
cónica $\Rightarrow H$ hiper adecuado $\Rightarrow \Gamma = H \cap V$

d par $\Rightarrow$ misma idea / d impar $(\ )^2 = 0 \ldots$

$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{P}^1$ $[x^2, y^2] \ldots$

$\mathbb{P}^2 \overset{f_3}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2$ $[xy, xz, yz]$ Luigi Cremona (de la scuola)

$[0,0,1]$ no permitido!



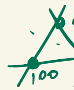
② $y = \lambda x$ ② $y=0$ $x=0$

$[x^2, \lambda^2 x^2] = [1, \lambda^2]$

[Pencil] $[x^2+y^2+z^2, x^2+xz+y^2]$ 4 puntos indef.

$[x^2, y^2, z^2]$ $= u, v, w$ $au + bv + cw = 0$ 4:1

$f_3 \circ f_3 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}^2}$, es un elemento de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ el grupo de Cremona (área de investigación)



001 100 010

$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ biracional.

Lema: Y = hipersuperficie en $\mathbb{A}^n_k$, $Y = \{f(x_1,\dots,x_n) = 0\}$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^n_k \setminus Y \simeq \{x_{n+1} f - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_k.$$

Así $\mathbb{A}^n_k \setminus Y$ es afín (isom. a var. afín) y sus funciones regulares son $k[x_1,\dots,x_n]_f$ [no todo abierto es afín e.g. $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$]

$\mathbb{A}^1 \setminus \{(0,0)\} \simeq \{xy = 1\} \subset \mathbb{A}^2_k$

Dem: • Sea $H = \{x_{n+1} f - 1 = 0\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n_k$, $\varphi(a_1,\dots,a_{n+1}) = (a_1,\dots,a_n)$.

y corresponde a $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n_k) = k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \mathcal{O}(H) \underset{\text{Tarea}}{=} k[x_1,\dots,x_n]_f$

• φ es biyectivo en la imagen $\underset{\mathbb{A}^n_k \setminus Y}{\overset{\shortparallel}{}}$ y $\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_n) = \left(x_1,\dots,x_n, \frac{1}{f(x_1,\dots,x_n)}\right)$

(regular en cada coordenada) ∎

Prop: $\forall$ variedad Y, $\exists$ base para la topología Zariski con sólo abiertos afines.

[Prop. 4.3]

- Sea $\varphi : X \dashrightarrow Y$ dominante racional, $\langle \mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}} \rangle$ representante.
- sea $f \in K(Y)$ representada por $\langle V, f \rangle$
- $\Rightarrow \varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \cap V \neq \emptyset$ abierto y $f \circ \varphi_{\mathcal{U}}$ regular en $\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(V)$.
- $\Rightarrow \langle \varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(V), f \circ \varphi_{\mathcal{U}} \rangle \in K(X)$. $\therefore$ $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Teo: X, Y variedades sobre k. Entonces hay una correspondencia 1-1:

$$\left\{ X \overset{\varphi}{\dashrightarrow} Y : \varphi \text{ dominante racional} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} K(Y) \hookrightarrow K(X) \\ \text{morfismos } k\text{-alg} \end{matrix} \right\}.$$

y así una equivalencia de categorías (contravariante)

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Variedades y } \varphi \\ \text{racionales dominantes} \end{matrix} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{matrix} \text{f.g. extensiones} \\ \text{de } k \end{matrix} \right\}.$$

Dem • Ya tenemos $X \overset{\varphi}{\dashrightarrow} Y \Rightarrow K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

• Si $\pi : K(Y) \hookrightarrow K(X)$, como $Y = \bigcup \mathcal{U}_a$, $\mathcal{U}_a$ afín
asumir Y = afín (queremos $\varphi : X \dashrightarrow Y$).

• $A(Y)$ anillo coord. generado por $y_1, \dots, y_n$.

• Mirar $\pi(y_i) \in K(X) \Rightarrow$ encontrar $\mathcal{U} \subset X$ abierto donde $\pi(y_i)$ son regulares

• Luego $\pi|_{K(Y)} : A(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y $\mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} Y$
y $\varphi : X \dashrightarrow Y$ es dominante

[si no es dom. $\Rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset W \underset{\text{cer}}{\subsetneq} Y \Rightarrow \exists f = 0$ en W no en todo Y
$\Rightarrow \pi(f) = 0$, $f \neq 0$, $f \in A(Y)$]

• Verificar inversa tarea.

• Y var $\Rightarrow K(Y) = K(\mathcal{U})$ $\mathcal{U}$ afín, $k(\mathcal{U})$ f.g. ext. de k (como cuerpo).

• Si $y_1, \dots, y_n \in K(Y)$ son gen$|_k \Rightarrow B := k[y_1, \dots, y_n]$ como k-álgebra
$\Rightarrow k[t_1, \dots, t_n] \twoheadrightarrow B$ y $K(B) = K(\mathcal{U}) = K(Y)$ ∎

Cor : X, Y var sobre k. Entonces,

$$X \underset{\text{bir}}{\simeq} Y \iff \exists\, \mathcal{U} \subset X,\ V \subset Y \text{ abiertos } \neq \emptyset \text{ con } \mathcal{U} \simeq V \iff K(X) \underset{k\text{-alg}}{\simeq} K(Y)$$

$\mathcal{U} \simeq V$

Cor : X var sobre k es racional $\iff K(X) \simeq k(x_1, \dots, x_n)$.

• Mirar preliminares algebraicos y demo de (p. 27)

Prop : Toda variedad sobre k de dimensión r es biracional a hipersuperficie en $\mathbb{P}^{r+1}$.

Cor: curvas planas ($\subseteq \mathbb{P}^2$) son modelo de toda curva.
superficies en $\mathbb{P}^3$ " " " " superficie.

Pero altamente singulares en general ...

3er problema importante: Resolución de singularidades. Dado X var. sobre k, una resolución de singularidades es una Y var. sobre k no singular y $Y \longrightarrow X$ morfismo birracional.

Hironaka 1969: si char $k=0 \Rightarrow \checkmark$ (medalla fields)

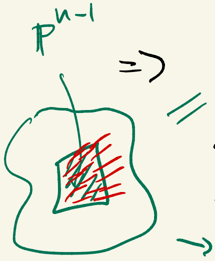
Varios casos sabemos en char $k>0$, pero sigue abierto en general ...

Humildemente miremos curvas, ie, curvas planas y apliquemos la gran técnica: Blow-up.

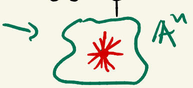
- En $\mathbb{A}^n_k \ni (0,0,\dots,0) = O$
- En $\mathbb{A}^n_{x_1,\dots,x_n} \times \mathbb{P}^{n-1}_{y_1,\dots,y_n}$ considerar

$$X = Bl_O(\mathbb{A}^n_k) := Z(x_i y_j - x_j y_i \ : \ i,j = 1,\dots,n)$$

$\Rightarrow \quad X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n_k$, proyección en $\mathbb{A}^n_k$.



Si $p \neq O \Rightarrow \varphi^{-1}(p)$ es 1 punto.
Si $p = O \Rightarrow \varphi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$



φ es un morfismo birracional.

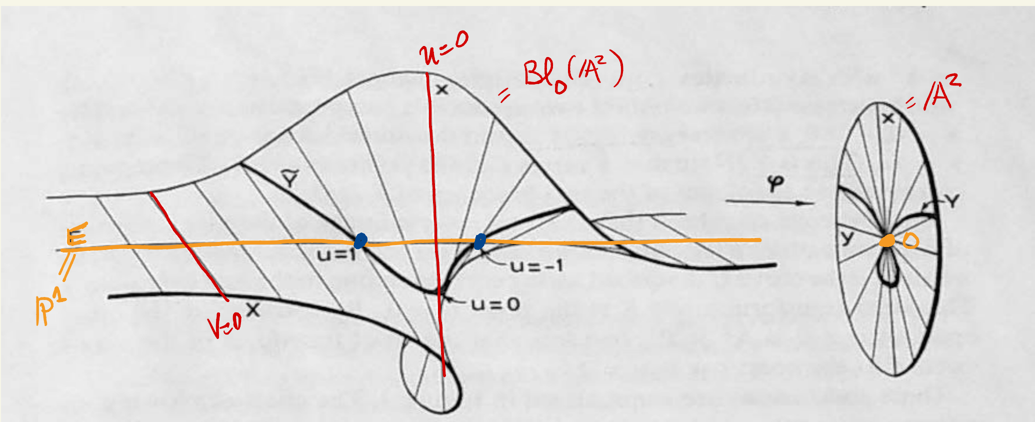
X no es afín, no es proyectiva, sí es variedad

Los puntos en $\varphi^{-1}(0)$ están 1-1 con las rectas por O en $\mathbb{A}^n_k$. [cepillo de dientes]

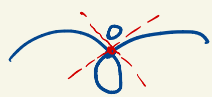
Def.: Si $Y \subset \mathbb{A}^n$ pasa por O y es variedad

$\Rightarrow$ se define la transformada propia $\tilde{Y}$ de Y como $\tilde{Y} := \overline{\varphi^{-1}(Y \setminus O)}$, y tenemos

$\varphi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ morfismo birracional.



$$Y = \{ y^2 = x^2(x-1) \}$$

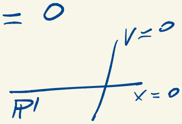


$$\mathbb{A}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1_{u,v} \supset Bl_0(\mathbb{A}^2) = \{ xv = yu \}$$

$v \neq 0$: $x = yu$ $\quad \varphi^{-1}(Y) = \{ y^2 = y^2u^2(yu-1) \}$

$\cong \mathbb{P}^1 \cup \tilde{Y}$ $\quad y^2(1 - u^2(yu-1)) = 0$

$\{y=0\} \subset Bl_0(\mathbb{A}^2)$ $\quad \underline{xv = 0}$ $\quad x=0$ o $v=0$



$\tilde{Y} = \{ 1 = u^2(yu-1) \}$ Si $y=0 \Rightarrow u^2 = 1$

$u = \pm 1$

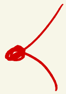
$u \neq 0$: $xv = y \Rightarrow x^2v^2 = x^2(x-1)$

$\underset{\mathbb{P}^1}{x^2}\,(\underbrace{v^2 - (x-1)}_{\tilde{Y}}) = 0$ $\Big\}$ Que sucede en $v=0$

$\tilde{Y} \longrightarrow Y$

resol. de sing.

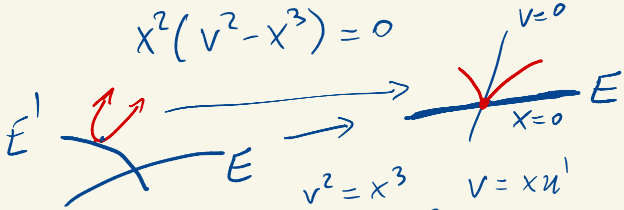
<u>Tarea</u>: $y^2 = x^5$



$x^2v^2 = x^5$ $u \neq 0$

$x^2(v^2 - x^3) = 0$

<u>Teo</u> a través de blow-ups se resuelven las sing de cualquier curva plana.

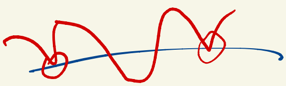


$v^2 = x^3$ $v = xu'$

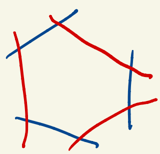
$x^2u'^2 = x^3$ $x = u'^2$

...

$\{ y^{n-1} = x^n \}$



arbol... resuelve :)



$= Bl_{p_1,p_2,p_3}(\mathbb{P}^2)$

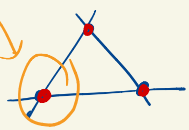
morph. morfismo

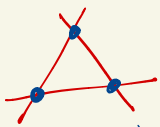
$\mathbb{P}^2 \overset{\text{apl.}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2$

Cremona

$[x,y,z] \dashrightarrow [xy, xz, yz]$

local





hacer localmente

$[x,y,1] \dashrightarrow [xy, x, y]$

$(x,u) \longrightarrow [x, ux, 1] \dashrightarrow [xux, x, ux]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; \|$

$(x,u) \xrightarrow{\text{ok :)}} [ux, 1, u]$