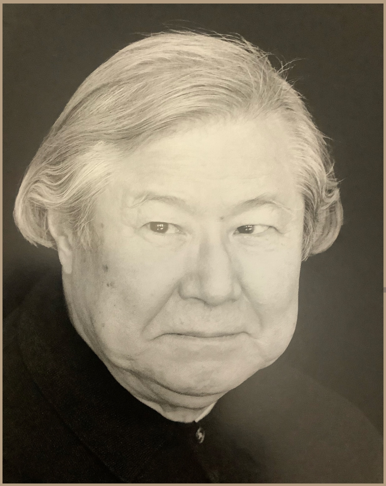
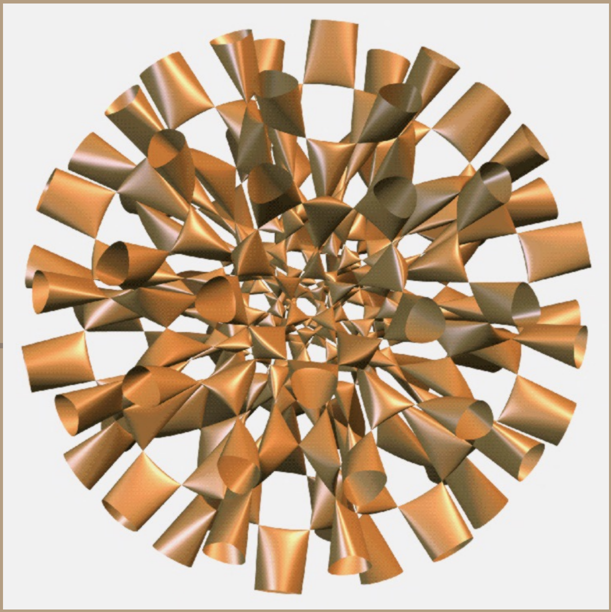


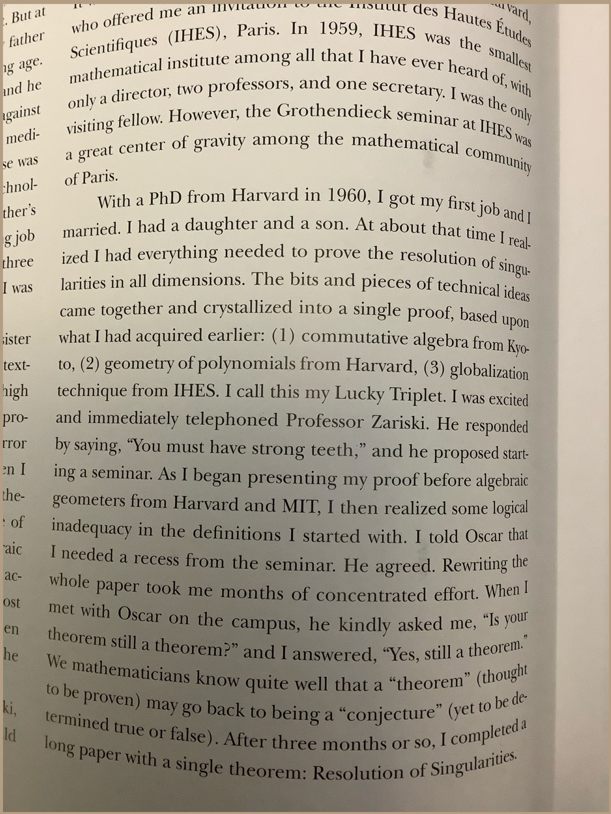
HIRONAKA



Superficie de Sarti
$S_{12} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

tiene 600 nodos (nada más) y el máximo puede ser 645.

(Y. Miyaoka)



who offered me an invitation to the Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), Paris. In 1959, IHES was the smallest mathematical institute among all that I have ever heard of, with only a director, two professors, and one secretary. I was the only visiting fellow. However, the Grothendieck seminar at IHES was a great center of gravity among the mathematical community of Paris.

With a PhD from Harvard in 1960, I got my first job and I married. I had a daughter and a son. At about that time I realized I had everything needed to prove the resolution of singularities in all dimensions. The bits and pieces of technical ideas came together and crystallized into a single proof, based upon what I had acquired earlier: (1) commutative algebra from Kyoto, (2) geometry of polynomials from Harvard, (3) globalization technique from IHES. I call this my Lucky Triplet. I was excited and immediately telephoned Professor Zariski. He responded by saying, "You must have strong teeth," and he proposed starting a seminar. As I began presenting my proof before algebraic geometers from Harvard and MIT, I then realized some logical inadequacy in the definitions I started with. I told Oscar that I needed a recess from the seminar. He agreed. Rewriting the whole paper took me months of concentrated effort. When I met with Oscar on the campus, he kindly asked me, "Is your theorem still a theorem?" and I answered, "Yes, still a theorem." We mathematicians know quite well that a "theorem" (thought to be proven) may go back to being a "conjecture" (yet to be determined true or false). After three months or so, I completed a long paper with a single theorem: Resolution of Singularities.

ga5

31/Agosto/21

Variedades singulares

§5. Variedades singulares.

Variedades pueden ser singulares y así localmente tenemos <u>toda</u> una fauna [al contrario de lo que sucede con manifolds]

$\boxed{\text{Def}}$: $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ variedad afín, $I(Y) = (f_1, \dots, f_r)$.

Y es <u>no-singular</u> en $P \iff$ rango $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right]$ es $n - \dim(Y)$.

Y es <u>no-singular</u> si lo es $\forall P$.

Ej.- $Y = \{f(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n_k$, entonces no singular en P es $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$ $\forall i$.

Una recta en $\mathbb{A}^2_k$ es no singular.
Si $P \in \{f_2(x, y) = 0\}$ cuádrica $\Rightarrow$ digamos $P = (0,0)$ y singular $\Rightarrow f_2 = ax^2 + bxy + cy^2 \rightarrow\leftarrow$ (reducible) $\therefore$ cuádrica es no singular.

[$x^2 + y^2 + z^2 = 0$  Nodo $(0,0,0)$ char $\neq 2$]

Ej.- $\{x^p + y^p + 1 = 0\} \Rightarrow$ char p dice singular en todos lados? ... $px^{p-1} = 0$ $\quad py^{p-1} = 0$

Pero es factorizable

$(x+y)^p + 1 =$ factorizable!

- Al final será independiente de los generadores.
- Zariski: Esto de ser singular no depende de $Y \subset \mathbb{A}^n_k$.

$\boxed{\text{Def}}$ A = anillo Noetheriano local, $\mathfrak{m}$ = ideal max $A/\mathfrak{m} = k$ = cuerpo residual. Entonces

A es <u>regular</u> $\iff \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Ej.- $A' = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}_{(p)} \supset (p)$ y $\mathbb{Z}_{(p)}/(p) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{k}$ $\overset{\mathbb{F}_p}{\shortparallel}$

y $(p)/(p^2) = \langle p \rangle$ sobre k.

Por otro lado, $\dim \mathbb{Z} = 1$ $\quad (0) \subsetneq (p) \subsetneq \mathbb{Z}$.

$1 = \dim \mathbb{Z}_{(p)}$ $\left((0) \subsetneq (p) \subsetneq A \right)$ ...

[Nota: $\mathfrak{m}$ es A-módulo y $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$ submódulo $\Rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es $A/\mathfrak{m}$-módulo, ie, k-espacio vectorial]

<u>Teorema</u>: $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ var. afín sobre k, $P \in Y$. Entonces,

P no singular $\iff \mathcal{O}_{P,Y}$ es regular.

<u>Dem</u>: • $P = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{a}_P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$

• Definir $\theta : k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow[\text{lineal}]{} k^n$, $\theta(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\theta(x_i - a_i)$ forman base y $\theta(\mathfrak{a}_P^2) = 0$

$\therefore \quad \Theta' : \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \xrightarrow{\sim} k^n$.

- Sea I el ideal de Y en $k[x_1,\dots,x_n]$, $I=(f_1,\dots,f_r)$.
  $\Rightarrow$ el rango de $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right]$ es $\dim \Theta(I)$ en k^n.

- Por Θ', es lo mismo que $\dim_k\left(I+\mathfrak{a}_p^2/\mathfrak{a}_p^2\right)$ en $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2$.

- Por otro lado, $\mathcal{O}_{P,Y} \simeq A(Y)_{\mathfrak{a}_p}$ y así
$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \mathfrak{a}_p/(I+\mathfrak{a}_p^2).$$

$$\frac{\mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2}{I+\mathfrak{a}_p^2/\mathfrak{a}_p^2}$$

$$\therefore \quad \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \text{rango}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right] = \dim_k \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 = n$$

- Sea $\dim Y = r$ y sabemos $\dim \mathcal{O}_{P,Y} = r$ (anterior!)
  $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{P,Y}$ regular $\Leftrightarrow$ $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$
  $\Leftrightarrow$ rango $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right] = n-r$ ∎

$\boxed{\text{Def}}$ Y una variedad. Entonces decimos que $P\in Y$ <u>no-singular</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{P,Y}$ es anillo regular. Y es no-singular si lo es $\forall P\in Y$.

- Por supuesto, al final del día, uno toma su vecindad afín y saca "derivadas".

$\underline{\text{Ej}}$: $Y=\{x^n+y^n+z^n+w^n=0\}$ en $\mathbb{P}^3_k$, $(\text{char}\,k, n)=1$

$$nx^{n-1}=0 \quad ny^{n-1}=0 \quad nz^{n-1}=0 \quad nw^{n-1}=0$$

$$\Rightarrow x=y=z=w=0 \rightarrow\leftarrow$$

$\therefore$ es no-singular.

Prop 5.2A: Si $A^{\mathfrak{m}}$ es anillo noetheriano local, $A/\mathfrak{m} \simeq k$
[AM_c Cor. 11.15] $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$.

Teorema: Y variedad $\Rightarrow \operatorname{Sing}(Y) \subsetneq Y$ cerrado.

Dem:
- $Y = \bigcup Y_i$, Y_i afin: p.d. $\operatorname{Sing}(Y) \cap Y_i$ es cerrado
- Sabemos que en un punto cualquiera
$\dim_k \mathcal{O}_{P,Y} \leq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n - \operatorname{rango}(\operatorname{Jac})$
y así $\operatorname{rang}(\operatorname{Jac}) \leq n - \underbrace{\dim}_{r}(Y)$ $(= \Leftrightarrow$ no sing$)$.
- $\operatorname{Sing}(Y_i) = \{P : \operatorname{rango} \operatorname{Jac}(P) < n-r\}$
$= Z(I(Y_i), \underbrace{|(n-r)\times(n-r)|}_{\text{submatrices de Jac}})$
$\Rightarrow$ cerrado.
- Sabemos Y birracional a hipersuperficie en $\mathbb{P}^n$
$\Rightarrow$ abierto donde son isomorfos.
- Ahora $\operatorname{Sing} Y = \{P \in Y : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ en $P\ \forall i\}$
- Si $\operatorname{Sing} Y = Y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ en Y y como $I(Y) = (f)$
y $\operatorname{grado}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \leq \operatorname{grado}(f) - 1\ \forall i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\ \forall i$
- Char $= 0 \Rightarrow$ ⇒⇐ ya que si x_i aparece en f
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$ (como polinomio).
- Char $p > 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow f = g(x_i^p)\ \forall i$
Tomar raíces p a coeficientes $\underset{(k=\bar{k})}{\Rightarrow} \exists g(x_1, \dots, x_n),\ f = g^p$ ⇒⇐
$\therefore \operatorname{Sing}(Y) \subsetneq Y$

Completación : Motiva la descripción local de los sing.

$A \supset \mathfrak{m}$ anillo local $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}$-adic topología y A se

[AM, §10] completa con esa topología : $A \longrightarrow \hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$

y si A Noetheriano $\Rightarrow A \hookrightarrow \hat{A}$.

Ej1.- $(p) \subset \mathbb{Z}$ p primo. $\mathbb{Z}_{(p)} = A \supset (p)$

y tomar $\mathbb{Z}_{(p)}/(p^n) \simeq \mathbb{Z}/p^n$

$\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}$ $\qquad \hat{\mathbb{Z}}_{(p)} = p$-ádic enteros.

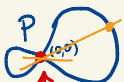
Ej1.- $k[x]$, $k[x]_{(x)}$ y $\widehat{k[x]_{(x)}} = k[[x]]$ el anillo de potencias formales.

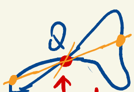
(Exercise 4.7) Si $p \in X$, $q \in Y$ variedades con $\mathcal{O}_{P,X} \simeq \mathcal{O}_{Q,Y}$ como k-álgebras $\Rightarrow$ cuerpos de fracciones son isom. $\Leftrightarrow X \simeq_{bir} Y$. ¡Mucha información!

PERO $\hat{\mathcal{O}}_{P,Y}$ es más local. Por ejemplo,

Si $\mathcal{O}_{P,X} \simeq \mathcal{O}_{Q,Y}$ $\Rightarrow$ birracionales $\Rightarrow \exists\, \mathbb{A}^1 \overset{bir}{\dashrightarrow} Y$ pero Y no es. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \xrightarrow{morf.}$ (ω ω) $= \tilde{Y} \longrightarrow Y$ resol. sing

holom.

X  P (0,0) nodo cúbica $\{y^2 = x^2(x+1)\}$ $\simeq_{bir} \mathbb{A}^1_k$

Y  Q nodo cuártica (1 nodo) $\Rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{P,X} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{Q,Y}$

$\exists \not\simeq_{bir} \mathbb{A}^1$ $\quad 3 \quad$ pero $X \not\simeq_{bir} Y$.

$g(\tilde{Y}) = \dfrac{(4-1)(4-2)}{2} - 1 = 2$

Teo 5.4A : $A \supset \mathfrak{m}$ anillo local Noetheriano, $\hat{A}$ completación.

(a) $\hat{A}$ local, $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$ y $A \hookrightarrow \hat{A}$.

(b) M f.g. A-modulo, $\hat{M}$ con respecto a $\mathfrak{m}M \Rightarrow \hat{M} \simeq M \otimes_A \hat{A}$.

(c) $\dim A = \dim \hat{A}$

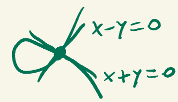
(d) A regular $\Leftrightarrow \hat{A}$ regular. Si $k \subset A$ y $\dim A = n$ $\underset{\text{(Cohen)}}{\Rightarrow}$ $\hat{A} \simeq k[[x_1, \dots, x_n]]$.

Def : $P \in X$, $Q \in Y$ son <u>analíticamente isomorfos</u> si $\hat{\mathcal{O}}_{P,X} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{Q,Y}$ como k-álgebras. [preserva dim, puntos suaves son anal isom]

Ej: $\{y^2 = x^2(x+1)\} = Y \ni O = (0,0) \Rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{O,Y} \simeq k[[x,y]]/(xy)$. [no preserva integralidad (dominio)]

char $\neq 2$

Primero, $k[[x,y]]/(y^2-x^2-x^3) \simeq \hat{\mathcal{O}}_{O,Y}$.



Idea : $\exists$
$$g = y + x + g_2 + g_3 + \cdots$$
$$h = y - x + h_2 + h_3 + \cdots$$
g_i, h_i homo grado i

tal que $gh = y^2 - x^2 - x^3$.

$\therefore$ un automorfismo de $k[[x,y]]$, $g \mapsto x$, $h \mapsto y$.

$$(y-x)g_2 + (y+x)h_2 = -x^3$$

como $\langle y-x, y+x \rangle = \langle x,y \rangle \subset k[x,y] \Rightarrow \exists g_2, h_2$.

$(y+x)h_3 + (y-x)g_3 = -g_2 h_2$ y lo mismo, etc...

ver más en los ejercicios (ej. 5.14)...

Ej: $Y = \{f = f_2 + f_3 + \cdots + f_m\} \subset \mathbb{A}^2_k$, $p = (0,0) \in$

$m_p(Y) = \text{grado}(f_i : i \text{ menor})$

$f_2 \neq 0 \Rightarrow$ puntos dobles.

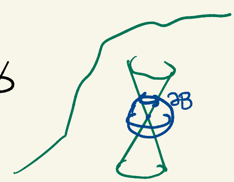
clasificar puntos dobles

<u>nodos</u> $\{x^2(x+1) = y^2\}$ $\neq$ <u>cúspide</u> $\{y^3 = x^2\}$ . . .

Teorema 5.7A (Teoría de eliminación)

Sean $f_1, \dots, f_r$ polinomios homogéneos en $x_0, \dots, x_n$ con coeficientes a_{ij}. Entonces, $\exists g_1, \dots, g_t$ polinomios en los a_{ij} con coeficientes en $\mathbb{Z}$ los cuales son homogéneos en coef. de cada f_j, tal que:

Para todo cuerpo k, y cada tupla $a_{ij} \in k$,
$$Z(f_1, \dots, f_r) \neq \emptyset \text{ en } \mathbb{P}^n \iff Z(g_1, \dots, g_t) \neq \emptyset \text{ en } \mathbb{P}^{\alpha_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{\alpha_t}$$



Paréntesis topológico: X variedad sobre $\mathbb{C}$ puede verse con topología inducida por $\mathbb{C}^N$. Si $\dim X = 2$, normal, $p \in X$ punto cualquiera, existe el link $M = \partial B \cap X$ dim real 3 [para todo detalle mirar D. Mumford, 1961, "The topology of normal sing of an alg. surface and a criterion of simplicity"

<u>Teo</u>: $\pi_1(M)$ trivial $\iff$ P es no-singular en X.
Si X es localmente en P homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^2$ $\Rightarrow$ $\pi_1(M)$ es trivial.

Recordar la situación $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \{y^2=x^3\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

$\simeq$

M simpáticos en $\dim X = 2$ son los espacios de Lens $L(m,q) := S^3/\mathbb{Z}/m$ $\quad S^3=\{|x|^2+|y|^2=1\}$

$(x,y)\longmapsto(\zeta x, \zeta^q y)$

$\mathrm{mcd}(m,q)=1$

Se relacionan con la correspondiente singularidad $\underbrace{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}/m}_{S_{m,q}=}$ en $(0,0)$ = var. afín sing. imagen $(0,0)$.

y para distintos q, no son isomorfos en general. ($S_{m,q}\simeq S_{m,q'} \iff qq'\equiv 1\,(m)$). en $M = L(m,q)$.

$$\underset{q_1}{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}/m} \simeq \underset{q_2}{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}/m} \iff q_1q_2\equiv 1\,(m)$$

[homeomorfos $L(m,q) \iff q_1q_2\equiv \pm 1\,(m)$ $\quad -2 \quad -2 \quad -3$

homotópicos $L(m,q) \iff q_1q_2\equiv \pm n^2\,(m)$, $\forall n\in\mathbb{N}$]

$$\frac{5}{2}=3-\frac{1}{2} \qquad \frac{5}{1}=5$$