«Eros de L'Univers», 1997

Roberto Matta

111111

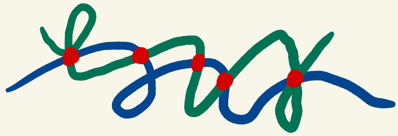
«L'impencible», 1957

ga6

2/Sept/21

intersección en $\mathbb{P}^n_k$

97. Intersección en $\mathbb{P}^n_k$.



¡Ojo! Teoría de intersección es energía vital, el eros de la geometría algebraica.

Dados $Y, Z \subset \mathbb{P}^n_k$ variedades proyectivas, queremos definir grado(Y) y orden de intersección de Y y Z en una componente W de $Y \cap Z$.

Luego $$Y \cdot Z = \sum i(Y, Z; W)\, W$$

y $$\sum i(Y, Z; W) \cdot \text{grado}(W) = \text{grado}(Y) \cdot \text{grado}(Z).$$

Ej.- En intro a geo. alg. vimos que si $\text{mcd}(F_d, G_e) = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\{F_d = 0\}}_{C} \cdot \underbrace{\{G_e = 0\}}_{C'} = \sum_{P \in C \cap C'} I(F_d, G_e; P) \cdot P$$

y $$\sum I(F_d, G_e; P) = d \cdot e \quad \text{(Bézout)}.$$

$$\text{grado}(C) = d = \text{intersección de } C \text{ con recta general en } \mathbb{P}^2_k$$

Intuitivamente: $Y \subset \mathbb{P}^n$ var. proy $\Rightarrow$ grado$(Y) = \#(Y \cap L)$ con L = var. lineal de $\mathbb{P}^n$ suf. general $\dim = n - \dim Y$.

Ej: cúbica torcida tiene grado 3.

$$\{\underset{[t,u] \in \mathbb{P}^1}{[t^3, t^2u, tu^2, u^3]}\} \cap \{Ax + By + Cz + Dw = 0\}$$

$\Rightarrow$ pol. cúbico ...

$$\underbrace{At^3 + Bt^2u + Ctu^2 + Du^3 = 0}_{\text{exact. } 3 \text{ raíces}}$$

Teo: (dim afín) Y, Z var. en $\mathbb{A}^n_k$. Entonces, todo componente irred W de $Y \cap Z$ tiene dim $\geq \dim Y + \dim Z - n$.

Dem:

- Asumir $Z = \{f = 0\}$. Si $Y \subset Z \Rightarrow$ listo $[\dim Y \geq \dim Y - 1]$.
- Si $Y \not\subset Z$, p.d. cada comp. W tiene dim $= \dim Y - 1$.
- Comp. irred. de $Y \cap Z$ corresp. a ideales primos $\mathfrak{p}$ de $A(Y)$ que contienen a (f), y por Krull (Thm 1.11A) y la relación entre altura y dim tenemos que $\dim A(Y)/\mathfrak{p} = \dim Y - 1$.
- Caso general: $Y \times Z \subseteq \mathbb{A}^{2n}$, $\dim(Y \times Z) = \dim(Y) + \dim(Z)$ (Tarea). Sea $\Delta = \{(p,p) : p \in \mathbb{A}^n\} \Rightarrow \Delta \simeq \mathbb{A}^n$ a través de $p \mapsto (p,p)$, y $Y \cap Z$ corresponde a $(Y \times Z) \cap \Delta$.
- Como Δ tiene dim n y
$$\dim Y + \dim Z - n = (\dim Y + \dim Z) + n - 2n$$
$\Rightarrow$ demostrar para $(Y \times Z) \cap \Delta$.
- Pero $\Delta = \{x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n\} \Rightarrow$ aplicar lo anterior n veces ∎

Teo: (dim Proy) Y, Z var en $\mathbb{P}^n_k$. Entonces, toda comp. de $Y \cap Z$ tiene dim $\geq \dim Y + \dim Z - n$.
Además, si $\dim Y + \dim Z - n \geq 0 \Rightarrow Y \cap Z \neq \emptyset$.

Dem: • Primera parte a través de cubr. afines y Teo anterior.

- Para lo segundo, sea $C(Y)$ y $C(Z)$ conos afines $\mathbb{A}^{n+1}_k$.
- (Tarea) $\dim C(Y) = \underbrace{\dim Y + 1}_{\text{"}r\text{"}}$, $\dim C(Z) = \underbrace{\dim Z + 1}_{\text{"}s\text{"}}$ y $C(Y) \cap C(Z) \neq \emptyset$.
- Luego cada comp. de $C(Y) \cap C(Z)$ tiene dim $\geq (r+1) + (s+1) - (n+1)$
$= r + s - n + 1 > 0$

$\Rightarrow C(Y) \cap C(Z)$ tiene punto $\neq (0,\dots,0) \Rightarrow Y \cap Z \neq \emptyset$ ■

Ahora vamos a darle un uso a $S(Y) = k[x_0, x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ de una variedad proyectiva. $= \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ $\boxed{f(d) = \dim_k S_d}$

$\boxed{\text{Def}}$: Un <u>polinomio numérico</u> es un $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $p(n) \in \mathbb{Z}$ $\forall n \gg 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Prop</u>: (a) Si $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ es polinomio numérico $\Rightarrow \exists c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ tal que $P(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r$

con $\binom{z}{r} = \frac{1}{r!} z(z-1)\cdots(z-r+1)$. En particular $P(n) \in \mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(b) Si $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ función y si $\exists\, Q(z)$ pol. numérico tal que $\Delta f := f(n+1) - f(n) = Q(n)$ $\forall n \gg 0 \Rightarrow \exists\, p(z)$ numérico tal que $f(n) = p(n)$ $\forall n \gg 0$.

<u>Dem</u>: base e inducción, ver Hartshorne Prop 7.3 ■

$\boxed{\text{Def}}$ Sea $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ anillo graduado. Un <u>S-módulo graduado</u> $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ tal que $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$. Si M es un S-módulo graduado y $\ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow M(\ell)$ es el <u>S-módulo torsido</u>

con $M(\ell)_d = M_{d+\ell}$. (Izquierda?)

Dado M S-módulo graduado, el <u>aniquilador de M</u> es

$$\text{Ann}(M) := \{ s \in S : s \cdot M = 0 \}.$$ (es ideal homogeneo)

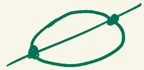
Si $\mathfrak{p} \subset S$ es un <u>primo minimal</u> que contiene a $\text{Ann}(M)$, se define la <u>multiplicidad de $\mathfrak{p}$ en M</u> $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$ como el largo de $M_{\mathfrak{p}}$ sobre $S_{\mathfrak{p}}$ (La más larga cadena posible $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_\ell = M_{\mathfrak{p}}$).

Ej.- $M = k[x,y,z]/(f^\ell)$ f irred homogeneo

$\Rightarrow \mu_{(f)}(M) = \ell$. Ese será su mayor uso...

$\boxed{\text{Def}}$: M S-módulo graduado con $S = k[x_0,\dots,x_n]$. La función de Hilbert φ_M de M es $\varphi_M(\ell) := \dim_k M_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Ejlo: $M = \underbrace{k[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2)}$



Pol. Hilbert: $\chi(\ell H) \underset{RR}{=}$ Teo int. $\ell H \cdot$ Var.

volado!

$$\varphi_M(\ell) \underset{R\text{-}R}{=} \deg(\ell L) + 1 = 2\ell + 1$$

$$\left[M = k[x,y,z]/(f_d), \quad \hat{\varphi}_d(\ell) = \ell d + 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} \atop \star \qquad \hat{\varphi}_3(\ell) = 3\ell \qquad \hat{\varphi}_4(\ell) = 4\ell - 2 \right]$$

Teorema (Hilbert-Serre) M = f.g. S-módulo, $S = k[x_0,\dots,x_n]$
$\Rightarrow \exists!\ P_M(z) \in \underset{\text{num.}}{\mathbb{Q}[z]}$ tal que $\varphi_M(\ell) = P_M(\ell)$ $\forall \ell >> 0$.
Además grado$(P_M(z)) = \dim Z(\text{Ann}(M))$.

Dem: Ver Hartshorne ■

$\boxed{\text{Def}}$: $P_M(z)$ es el polinomio de Hilbert de M.

$\boxed{\text{Def}}$: Para $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ conj. algebraico de dim r, el polinomio de Hilbert de Y es el de $S(Y)$. El grado de Y es definido como $r! \cdot$ coef. líder de $P_Y(z)$.

Prop 7.6:
(a) Si $Y \subset \mathbb{P}^n$ y $Y \neq \emptyset \Rightarrow$ grado$(Y) > 0$.
(b) Si $Y = Y_1 \cup Y_2$, $\dim Y_1 = \dim Y_2 = r$ y $\dim(Y_1 \cap Y_2) < r$
$\Rightarrow$ grado(Y) = grado(Y_1) + grado(Y_2).
(c) grado$(\mathbb{P}^n) = 1$.
(d) Si $Y = \{F_d = 0\} \subset \mathbb{P}^n \Rightarrow$ grado$(Y) = d$.

Dem:
intersección
(a) Como $Y \neq \emptyset$, $P_Y(z) \neq 0$ de grado $\dim Y$. Por Prop. numérica grado$(Y) = c_0 \in \mathbb{Z}$. Es un entero positivo ya que $P_Y(\ell) = \varphi_{S/I}(\ell) \geq 0$ $\forall \ell >> 0$.
(b) I_1, I_2 ideales de Y_1, Y_2 $\Rightarrow$ $I = I_1 \cap I_2$ ideal de Y.
$$\Rightarrow 0 \to S/I \to S/I_1 \oplus S/I_2 \to S/(I_1+I_2) \to 0$$
$$a \mapsto (a, -a)$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

Sabemos que $Z(I_1+I_2) = Y_1 \cap Y_2$ y tiene dim menor que $Y_1 \cup Y_2$

$\Rightarrow$ grado$\left(P_{S/I_1+I_2}(z)\right) < r$.

$\Rightarrow$ líder de $P_{S/I}(z)$ es la suma de líderes $P_{S/I_1}(z)$ y $P_{S/I_2}(z)$.

(c) Tenemos que sacar el Hilbert de $S = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Para

$S_\ell : \langle \text{monom} \rangle$ $\varphi_S(\ell) = \binom{\ell+n}{n} \Rightarrow P_S(z) = \binom{z+n}{n}$ y así como líder tiene $\frac{1}{n!}$

nos da grado$(\mathbb{P}^n) = 1$.

(d) Si $f_d \in S$ es homogeneo de grado d

$$\Rightarrow \quad 0 \to S(-d) \xrightarrow{f_d} S \to S/(f_d) \to 0$$ (La de siempre!)

es exacta y graduada.

$$\Rightarrow \quad \varphi_{S/(f)}(\ell) = \varphi_S(\ell) - \varphi_S(\ell - d) \qquad [S(-d)_m = S(m-d)]$$

$$\Rightarrow \quad P_{S/(f)}(z) = \binom{z+n}{n} - \binom{z-d+n}{n} = \frac{d}{(n-1)!} z^{n-1} + \cdots \quad \blacksquare$$

obs.:

$\mathbb{P}^2$ $$\binom{z+2}{2} - \binom{z-d+2}{2} = \frac{(z+2)(z+1)}{2} - \frac{(z-d+2)(z-d+1)}{2}$$
$$= dz + 1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

$\mathbb{P}^3$ $$\binom{z+3}{3} - \binom{z-d+3}{3} = \frac{d}{2} z^2 + \left(2d - \frac{1}{2} d^2\right) z + 1 + \frac{(d-1)(d-2)(d-3)}{6}$$

Si $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ es var. proyectiva y $\dim Y = r$, tomar hipersuperficie $H \subset \mathbb{P}^n_k$ tal que $H \not\supset Y \Rightarrow Y \cap H = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_s$ $\dim Z_i = r-1$.
Sea $\mathfrak{p}_j$ = primo correspondiente a Z_j.

Def: La multiplicidad de intersección de Y y H en Z_j es
$$i(Y, H; Z_j) := \mu_{\mathfrak{p}_j}\left(S/(I_Y + I_H)\right).$$

Teo: Y var. de $\dim \geq 1$ en $\mathbb{P}^n$ y H hipersuperficie $\not\supset Y$.
Sean $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ componentes irreducibles de $Y \cap H$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot \text{grado}(Z_j) = \text{grado}(Y) \cdot \text{grado}(H).$$

Dem: Pasa por miras $0 \to (S/I_Y)(-d) \xrightarrow{f} S/I_Y \to S/I_Y + I_H \to 0$
y filtraciones con los p_i, donde se comparan los coeficientes líderes de polinomios de Hilbert. Mirar Hartshorne ■

Cor (Bézout) Y, Z curvas distintas de $\mathbb{P}^2_k$ grados d, e.

$$\Rightarrow \sum_{P \in Y \cap Z} i(Y, Z; P) = d \cdot e.$$

Dem: mirar descomposición de $Y = \{ f_1^{\alpha_1} \cdots f_\ell^{\alpha_\ell} = 0 \}$.

$Y_i = \{ f_i = 0 \}$, $Y_i \not\subset Z \ \forall i$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_j \cdot i(Y_i, Z; P) = i(Y, Z; P)$$

$$\left[\mu_P\left(S/(f, I(Z)) \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_P\left(S/(f_i^{\alpha_i}, I(Z)) \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \mu_P\left(S/(f_i, I(Z)) \right) \right]$$

y luego aplicar el teorema, con $\deg(P) = 1$ ■

También el teorema da la idea de grado inicial. Si Y = Var proy dim r en $\mathbb{P}^n$ $\Rightarrow$ intersectar Y con hiperplanos (grado 1) sucesivamente tal que no contengan componentes. Luego llegamos a puntos.
$\therefore \sum_j i(Y, \text{lineal}; P_j) \cdot 1 = \text{grado}(Y)$. Se puede hacer esto tal que todas las multiplicidades son 1.

["Intersection theory" W. Fulton para intersección general]

R-R

$k = \bar{k}$ proy.

Teo int

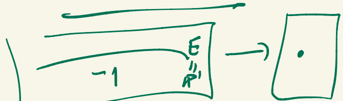
dim 1 : $\text{gr}\left(\sum \alpha_i P_i \right) = \sum \alpha_i$

dim = 2 (sing) : $\left(\sum \alpha_i \Gamma_i \right) \cdot \left(\sum \beta_j \Gamma_j' \right) \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$

⋮

$\Gamma \cdot \Gamma' < 0$???

$\Gamma \cdot \Gamma'$



$E^2 = -1$