Manera sistemática de recordar datos algebraicos locales en un espacio topológico.

ga7

7/9/21

haces

§1. Haces (Gavillas, sheaves, faisceaux)

$\boxed{\text{Def}}$ X = espacio topológico. → anillos, Mod...

Un pre-haz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos en X consiste en los datos:

(a) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es grupo abeliano. (valores)

(b) $\forall\, V \subseteq \mathcal{U}$ entre abiertos, tenemos

$$\rho_{\mathcal{U}V} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

morfismo de grupos. (restricciones)

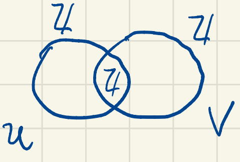
tal que:

(0) $\mathcal{F}(\phi) = \{0\}$ (1) $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = 1\!\!1_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$ (2) $W \subseteq V \subseteq \mathcal{U}$ abiertos $\Rightarrow \rho_{\mathcal{U}W} = \rho_{VW} \circ \rho_{\mathcal{U}V}$.

Categóricamente: $\mathcal{T}op(X) = \{$objetos = abiertos, $\subseteq$ = morfismos$\}$ (así $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},V) = \phi$ ó $\subseteq$) $\Rightarrow$ un pre-haz es un functor contravariante a la categoría de grupos abelianos.

<u>Notación</u>: $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ = secciones de $\mathcal{U} = \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (futuro $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$).

<u>obs</u>: • Si a X le damos para $\mathcal{U} \not\subseteq V$, $\rho_{\mathcal{U}V} = 0$ y lo que sea para $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ (= digamos a $\mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ es pre-haz.



$\Rightarrow$ No pegan, lo <u>local</u> no determina para nada lo global.

• Típicamente tendremos valores $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ en una base y queremos saber valores $\forall\, \mathcal{U}$: "extensión de funciones" "algo".

Def.- Un pre-haz $\mathcal{F}$ es un <u>haz</u> si satisface:

(loc. deter.) (3) $\mathcal{U}$ abierto, $\mathcal{U} = \bigcup V_i$, V_i abiertos, $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ con $s|_{V_i} = 0 \ \forall i \Rightarrow s = 0$ en $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

(pegado) (4) $\mathcal{U}$ abierto, $\mathcal{U} = \bigcup V_i$, V_i abiertos, $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j} \Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, $s|_{V_i} = s_i \ \forall i$.

Ej.- X = Variedad sobre k, $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto
$\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ = anillo de funciones regulares
con $\rho_{\mathcal{U}V}$ = restricciones

$\Rightarrow \mathcal{O}_X$ es un haz de anillos en X. [haz estructural de X]

[función que es loc. cero $\Rightarrow$ es cero (3)
función loc regular define función regular (4)]

Ej.- X = Var. proy dim ≥ 1 $k = \overline{k}$. Luego tuvimos que demostrar que $\mathcal{O}_X(X) = k$. El $\mathcal{O}_X$ es un invariante bajo isom en sus abiertos ... Pero mejor aun tendremos en cohomología otros $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ inv también.

Ej.- X = esp. topo. y A = grupo abeliano.
El <u>haz constante</u> en X es:

Dar a A la topo. discreta, para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ = grupo funciones cont. $\mathcal{U} \to A$.
Entonces con las restricciones obtenemos un haz.
Notar que si $\mathcal{U}$ conexo $\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{U}) = A$. Si $\mathcal{U}$ tiene solo comp. abiertas $\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{U})$ = producto directo de A.
<u>Notar</u>: Incluso si $X = S^1$, $A = \mathbb{Z}$, el $\mathcal{A}$ da información no trivial usando cohomología: $H^1(S^1, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Def}}$ Sea $\mathcal{F}$ un <u>pre-haz</u> de X y $p \in X$ punto.

Stalk (Tallo) $\quad \mathcal{F}_p := \{\langle \mathcal{U}, s\rangle : p \in \mathcal{U} \text{ abierto}, s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})\} \big/ \langle \mathcal{U}, s\rangle \sim \langle V, s'\rangle$

ssi $\exists\, W \ni p$ abierto, $W \subseteq \mathcal{U} \cap V$ y $s|_W = s'|_W$.

[Para $\mathcal{O}_X$ (X variedad) $\mathcal{O}_{X,p} = (\mathcal{O}_X)_p$ definido antes]

<u>Morfismos</u>: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ pre-haces en X. Un <u>morfismo</u>

$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es $\varphi(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})$ morf. grupos

$\forall\, \mathcal{U}$ abierto y si $V \subseteq \mathcal{U}$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{U}V}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \arrow[d, "\rho'_{\mathcal{U}V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}.$$

Para haces lo mismo, isomorfismo cuando hay inversos.

<u>obs</u>: Dado $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de pre-haces
$\Rightarrow \varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \quad \forall\, p \in X$
$\langle \mathcal{U}, s\rangle \mapsto \langle \mathcal{U}, \varphi(\mathcal{U})(s)\rangle$

bien definido!

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{F}(W) \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{G}(V) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{G}(\mathcal{U}) \arrow[r] & \mathcal{G}(W) & \mathcal{G}(V) \arrow[l]
\end{tikzcd} \qquad W \subseteq \mathcal{U} \cap V$$

<u>Prop</u>: Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces en X.

Entonces φ isom $\Leftrightarrow \forall\, p \in X$, $\mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p$ isomorfismo.

(la justificación de la Gorilla)

Dem: → Si φ es isomorfismo $\Rightarrow$ claramente φ_p son isomorfismos.

→ Asumir φ_p es isom $\forall p$. Sea $\mathcal{U}$ abierto <u>p.d.</u>
$\varphi(\mathcal{U}): \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es isomorfismo.

→ $\varphi(\mathcal{U})$ es 1-1: Sea $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ y suponer $\varphi(\mathcal{U})(s) = 0 \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$.
$\Rightarrow \forall p \in \mathcal{U}$, $\varphi(\mathcal{U})(s)_p$ en $\mathcal{G}_p$ es cero.

$$\begin{array}{ccc} & s \in \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{F}_q & & \mathcal{F}_p \\ s_q & & s_p \end{array}$$

Como φ_p es 1-1 $\forall p$ $\Rightarrow$ $s_p = 0$ en $\mathcal{F}_p$ $\forall p \in \mathcal{U}$

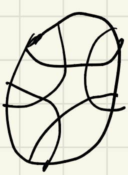
Pero $s_p = 0$ significa que s_p, 0 son misma clase $\Rightarrow$ $\exists\, W_p \ni p$ abierto, $W_p \subseteq \mathcal{U}$ tal que $s|_{W_p} = 0$. Como $\mathcal{U} = \bigcup W_p$ y $\mathcal{F}$ es haz $\Rightarrow$ $s = 0$ en $\mathcal{U}$.

→ $\varphi(\mathcal{U})$ es sobre: Sea $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$.

$\forall p \in \mathcal{U}$, $t_p \in \mathcal{G}_p$ $\Rightarrow$ $\exists$ $s_p \mapsto t_p$ (hipótesis)

digamos s_p está representado por $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$
$s_p = \langle V_p, s(p) \rangle$, $V_p \ni p$ abierto, $V_p \subseteq \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(s(p))$ y $t|_{V_p}$ son dos secciones de $\mathcal{G}(V_p)$ con mismo germen en p



$$\Rightarrow \varphi(s(p)) = t|_{V_p} \text{ en } \mathcal{G}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{más chico}}}{V_p})$$

→ $\mathcal{U} = \bigcup V_p$ cubrimiento por esos abiertos

y $s(p)|_{V_p \cap V_q}$ $\quad s(q)|_{V_p \cap V_q}$ en $\mathcal{F}(V_p \cap V_q)$

$$t|_{V_p \cap V_q}$$

por lo anterior, es 1-1, $s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$.

Como $\mathcal{F}$ es haz $\Rightarrow \exists\, s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, $s|_{V_p} = s(p)$.

$\varphi(s)|_{V_p} = t|_{V_p}$. Como $\mathcal{G}$ es haz $\Rightarrow \varphi(s) = t$ ■

$\boxed{\text{Def}}$: Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ morfismo de pre-haces.

Entonces tenemos los pre-haces:

$\ker(\varphi)$: $\mathcal{U} \mapsto \ker(\varphi(\mathcal{U}))$.

$\operatorname{coker}(\varphi)$: $\mathcal{U} \mapsto \operatorname{coker}(\varphi(\mathcal{U}))$.

$\operatorname{Im}(\varphi)$: $\mathcal{U} \mapsto \operatorname{Im}(\varphi(\mathcal{U}))$.

¿ Será que si $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ mor. de haces $\Rightarrow$ ker, coker, Im son haces?

<u>Resp</u>: ker ✓, coker, Im X .

<u>Lema</u>: $\ker(\varphi)$ es un haz si $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ es entre haces.

<u>Dem</u>: (3) ✓ ya que $\mathcal{F}$ es haz (4) ✓ ya que $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ es haz. ■

Ejl.- $X = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$\mathcal{O}_X$ = haz de funciones holomorfas (+)
$\mathcal{O}_X^*$ = haz de funciones holom no nulas $(\cdot)$

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^* \, , \quad \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{O}_X^*(U)$$
$$f \mapsto e^f$$

Por definición, $\mathrm{Im}(\varphi) = \{h \in \mathcal{O}_X^*(U) : h = e^f\}$
ie los que poseen logaritmos.

Si $U \cup V = X$, U, V son simplemente conexos
$\Rightarrow$ siempre hay logaritmo y así $\mathrm{Im}(\varphi)(\underset{V}{U}) = \mathcal{O}_X^*(\underset{V}{U})$

Pero $\frac{1}{z} \in \mathcal{O}_X^*(X)$ y no tiene logaritmo.

Pero $\frac{1}{z}\Big|_U$ $\frac{1}{z}\Big|_V$ si lo tienen, pero
no existe sección global ∴ $\mathrm{Im}\,\varphi$ no es haz.

Así $\mathrm{Coker}(\varphi)$ tampoco lo es, $0 \neq \frac{1}{z} \in \mathrm{Coker}(\varphi)(X)$
pero $\frac{1}{z}\Big|_U = 0$, $\frac{1}{z}\Big|_V = 0$ ∴ $\mathrm{Coker}(\varphi)$ no es haz.

<u>Prop-Def</u> : Dado pre-haz $\mathcal{F}$, existe haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ con la propiedad: Dado $\mathcal{G}$ haz y $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$
$\exists!$ $\psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que

(hacificación)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\psi\ \exists!"] \\ \mathcal{F} \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\square"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

$\underbrace{(\mathcal{F}^+, \theta)}_{\text{haz asociado a } \mathcal{F}}$ es único