$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\exists!"] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{UV}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

X = Esp. topológico

$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ = grupos abelianos

ga 8

9/9/21

haces +

Spec

X = Espacio topológico

$\mathcal{F}$ = pre-haz. ¡lo podemos hacificar!

<u>Prop-Def</u>: Dado un pre-haz $\mathcal{F}$, existe haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ con la propiedad:

$$\mathcal{G} = \text{haz} \ , \quad \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

$$\Rightarrow \ \exists! \ \psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{tal que}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, "\exists! \psi"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

$(\mathcal{F}^+, \theta)$ es único (salvo isomorfismos) y es el haz asociado a $\mathcal{F}$.

<u>Dem</u>:

- $$\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) := \left\{ \begin{array}{l} s : \mathcal{U} \longrightarrow \bigcup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_p \ \text{ tal que} \\ (1) \ \ s(p) \in \mathcal{F}_p \ , \ \forall p \in \mathcal{U} . \\ (2) \ \ \text{Para cada } p, \ \exists V \ni p \text{ abierto} \\ \quad \ \ \text{y } t \in \mathcal{F}(V) \text{ tal que } \forall q \in V, \\ \qquad \quad t_q = s(q) \text{ en } \mathcal{F}_q \end{array} \right\}$$

esto es un haz con las restricciones de $\mathcal{F}$ y $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$.

• Para definir $\mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$, tomo $\mathcal{U}$ abierto

$s \in \mathcal{F}^+(\mathcal{U}) \Rightarrow$ tenemos $\{(V,t)\}$
$\mathcal{U} = \bigcup V$

$\therefore$ Definir $\{(V, \varphi(t))\}$ pero el $\mathcal{G}$ es haz $\therefore$ levanta a una sección de $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ $\blacksquare$

obs 1.- $\mathcal{F}$ pre-haz

$$\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) = \bigcup_{p \in X} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\pi} X$$

$$s_p \longmapsto p$$

$\bar{s}$

$\mathcal{U} \subset X$ abierto $\quad s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

$\bar{s} : \mathcal{U} \to \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$

$\pi \circ \bar{s} = 1\!\!1_{\mathcal{U}}$.

y si consideran todos los posibles secciones $\therefore$ $\mathcal{F}^+(\mathcal{U})$.

$\boxed{\text{Def}}$: Un <u>sub-haz</u> de un haz $\mathcal{F}$ es un haz $\mathcal{F}'$ tal que $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto $\mathcal{F}'(\mathcal{U}) \leq \mathcal{F}(\mathcal{U})$ y la restricción inducida. Así $\mathcal{F}'_p \leq \mathcal{F}_p$.

Por ejemplo: $\mathcal{F} \xrightarrow[\text{haces}]{\varphi} \mathcal{G} \Rightarrow \ker(\varphi)$ es un subhaz de $\mathcal{F}$.

$\boxed{\text{Def}}$: $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ de haces es <u>inyectivo</u> si $\ker(\varphi) = \{0\}$. Así φ es inyectivo $\iff \varphi(\mathcal{U})$ es 1-1 $\forall \mathcal{U}$.

$\boxed{\text{Def}}$: $\mathcal{F} \xrightarrow[\text{haces}]{\varphi} \mathcal{G}$, se define

$Im(\varphi)$ = haz asociado a la imagen de φ
$(= Im(\varphi)^+)$

$\left[\therefore\ \exists\ Im(\varphi) \longrightarrow \mathcal{G} \text{ y es inyectivo.} \right]$

Se dice que φ es <u>sobre</u> si $Im(\varphi) = \mathcal{G}$.

$\boxed{\text{Def.}}$ $\quad \dots \to \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \to \dots$

se dice <u>exacta</u> si $\ker(\varphi^i) = Im(\varphi^{i-1})$.

$$\left[\underbrace{0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}}_{\text{inyectiva}} \underbrace{\to \mathcal{M} \to 0}_{\text{sobre}} \text{ exacta corta} \right]$$

$\boxed{\text{Def}}$: $\mathcal{F}'$ sub-haz $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es el haz asociado a $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{U})/\mathcal{F}'(\mathcal{U})$.

Para $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \Rightarrow \operatorname{coker}(\varphi)$ = es el haz asociado a "$\operatorname{coker}(\varphi)$".

$\mathcal{U} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{U})/Im(\varphi(\mathcal{U}))$ $\qquad \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$, $Im(\varphi) < \mathcal{G}$

$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\varphi(\mathcal{U})} \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\ \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{G}(\mathcal{U})/Im(\varphi(\mathcal{U})) \end{array}}$

$\boxed{\text{Obs}}$: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobre $\not\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ sobre $\forall \mathcal{U}$.

pero sobre $\Leftrightarrow \mathcal{F}_p \twoheadrightarrow \mathcal{G}_p \quad \forall p$

exacta $\Leftrightarrow \dots \to \mathcal{F}_p^i \to \dots$ es exacta $\forall p$

$\boxed{\text{Def}}$. $X \xrightarrow{f} Y$ continua :

(imagen directa) $\mathcal{F}$ haz en X, $f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ es haz! en Y

(imagen inversa) $\mathcal{G}$ haz en Y, $f^{-1}\mathcal{G}$ [no es $f^*\mathcal{G}$]

el haz en X asociado a $\mathcal{U} \mapsto \lim\limits_{\substack{V \supseteq f(\mathcal{U}) \\ \text{abierto}}} \mathcal{F}(V)$ "Tallo".

$\boxed{\text{Def}}$ $Z \xhookrightarrow[\text{inclusión}]{i} X$ top. subespacio

$\mathcal{F}$ haz en $X \Rightarrow i^{-1}\mathcal{F}$ se llama la restricción de $\mathcal{F}$ en Z.

$i^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}|_Z$

$(\mathcal{F}|_Z)_p = \mathcal{F}_p$

---

§2. Esquemas.

Los abiertos básicos de los esquemas son los Spec(A), donde A es un anillo conm. con $1 \neq 0$.

$\boxed{\text{Def}}$.- $\operatorname{Spec}(A) := \{ \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \subsetneq A \}$

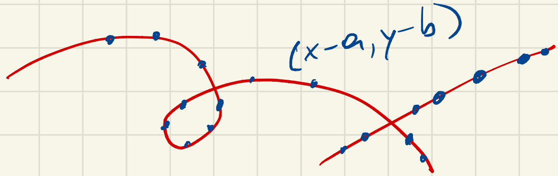
Dado $\mathfrak{a} \subset A$ ideal $\Rightarrow V(\mathfrak{a}) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \}$.

Ej.- $A = k[x,y] \ni \underset{(0)}{\underset{\#}{\mathfrak{p}}}$ primo no maximal
$k = \bar{k}$

$\mathfrak{p} = (f)$ f irreducible

$\mathrm{Spec}(A) \ni \mathfrak{p}$ (curvas son puntos).

$\mathfrak{a} \subset A = k[x,y]$ ideal $\quad V(\mathfrak{a})$ conj. alg.



Lema: (a) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dos ideales en $A \Rightarrow V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

(b) Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es colección de ideales en A

$$\Rightarrow V\left(\sum \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$$

(c) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales. Luego $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Dem:

(a) $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ ó $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$

y $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \exists b \in \mathfrak{b},\ b \notin \mathfrak{p}$. Luego $\forall a \in \mathfrak{a}$

$ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

(b) $\mathfrak{p} \supseteq \sum \mathfrak{a}_i \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i \ \forall i$.

(c) [AM. Prop. 1.8] (Zorn) $\quad \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \text{ primo}} \mathfrak{p} \quad \ldots$ ∎

Así, tenemos topología en $\mathrm{Spec}(A)$ donde los cerrados son los $\{V(\mathfrak{a})\}_{\mathfrak{a} \subset A \text{ ideal}}$.

$$V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A), \quad V(A) = \emptyset.$$

Ejs. K cuerpo, $\mathrm{Spec}(K) = $ pto

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), (p), p \text{ primo}\}$

$\mathrm{Spec}(A(X)) = \{$ todos sus subvariedades $\}$

X ← variedad

<u>haz estructural</u>: Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, tenemos $A_\mathfrak{p}$ localización en $\mathfrak{p}$. Para cada $\mathcal{U} \subset \mathrm{Spec}(A)$ abierto, se define:

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{array}{l} s : \mathcal{U} \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} A_\mathfrak{p} \text{ tal que} \\ (1) \ s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p} \\ (2) \text{ Para cada } \mathfrak{p}, \ \exists V \ni \mathfrak{p} \subseteq \mathcal{U} \text{ (vecindad de } \mathfrak{p}) \\ \text{y } a, f \in A \text{ tal que } \forall \mathfrak{q} \in V, \ f \notin \mathfrak{q} \\ \text{y } s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \text{ en } A_\mathfrak{q} \end{array} \right\}$$

sumas y productos de s's están en $\mathcal{O}(\mathcal{U})$

el 1 está: $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ es anillo conmutativo con 1.

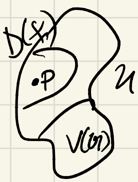
$$V \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \rho_{\mathcal{U}V} : \mathcal{O}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$$

es restringir la sección.

$\boxed{\text{Def}}$ Espectro de A es $\mathrm{Spec}(A)$ con su topología y su haz estructural.

Notación: Si $f \in A$, $D(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus V((f))$.

Los $D(f)$ forman una base para la topología:

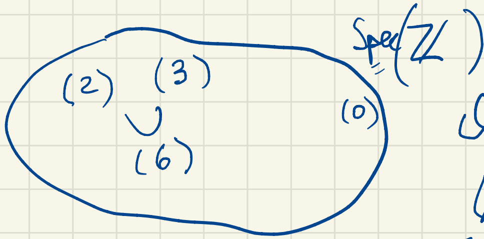


$\mathcal{U}$ $V(\mathfrak{a})$ cerrado y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ y $\exists f \in \mathfrak{a}$, $f \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in D(f)$, $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

¡Ustedes me dicen cómo jugar!

• $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathfrak{a} = (6)$, $V(\mathfrak{a}) = \{(2),(3)\}$

$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus V(\mathfrak{a})$



$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \Big\{ s : \mathcal{U} \to \coprod_{p \neq 2,3} \mathbb{Z}_{(p)} \quad \dots \Big\}$$

$$\Downarrow$$

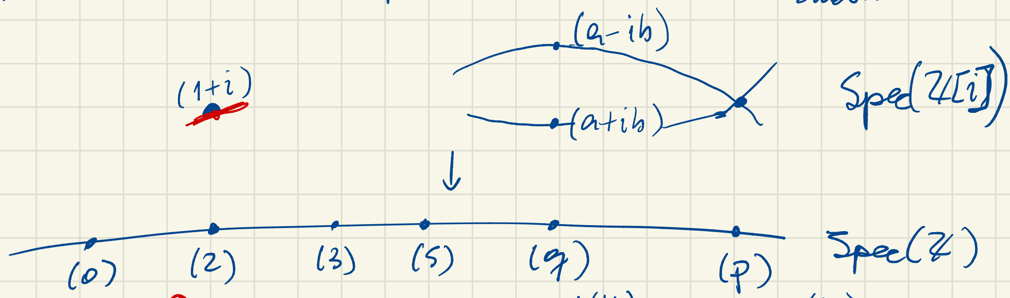
$$\frac{5}{2^3 \cdot 3^7}$$

$$\mathcal{O}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

• $$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i]) = \left\{ \begin{array}{ll} & (1+i) \\ (a+ib) & a^2+b^2 = q \text{ primo} \\ (a-ib) & q \equiv 1 \pmod 4 \\ (p) & p \equiv 3 \pmod 4 \text{ primo} \end{array} \right\}$$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i] = \{ a+ib : a,b \in \mathbb{Z} \}$ $\quad i^2 = -1$.

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \longleftarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i])$. Curvas suaves!



$-i\cdot(i+1)^2 = 2$

parametro
