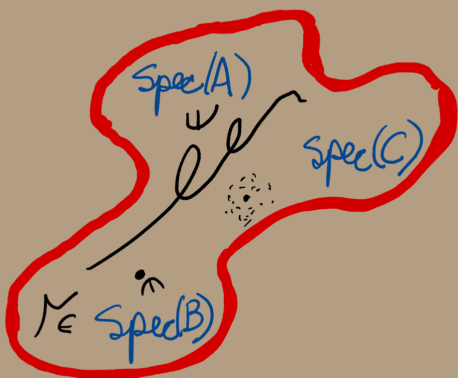


ga9

14 / Sept / 2021

Esquema

Vimos recién: $\big(\underset{\text{espacio topológico}}{\mathrm{Spec}(A)}, \underset{\text{haz estructural}}{\mathcal{O}}\big)$

$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$

Base $\{D(f) = \mathrm{Spec}(A) \setminus V((f))\}$.

Ej: $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0), (x-a), (x^2+bx+c)\}$, $b^2+4c<0$

$\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[x] \leftarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x]$

$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$

$\updownarrow$

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$

y al contrario de Intro a la geo. alg

$$\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])) = \mathbb{R}[x].$$

No confundir (0) con $(x-0)$: (0) representa "todo", $(x-0)$ es solo un punto más.

$$\overline{\{(0)\}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$$

Prop: (a) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}$.

(b) $f \in A$, entonces $\mathcal{O}(D(f)) \simeq A_f$. $= \{\frac{a}{f^{\ell}} : \dots\}$

(c) En particular $(f=1)$, $\Gamma(\mathrm{Spec}\,A, \mathcal{O}) \simeq A$.

Dem: (a) • Definir $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ es morfismo de anillos, bien definido y sobre

$\mathcal{U} \to \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} A_{\mathfrak{p}}$ $\qquad \langle \mathcal{U}, s \rangle \mapsto s(\mathfrak{p})$

ya que cualquier elemento en $A_{\mathfrak{p}}$ es $\frac{a}{f}$ con $a, f \in A$ y $f \notin \mathfrak{p}$

$\Rightarrow$ $D(f)$ es un abierto válido : $\langle D(f), \frac{a}{f} \rangle \mapsto \frac{a}{f}$.

- Para 1-1: Tomar $s, t \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \ni p$ con $s(p) = t(p)$ en p.
- Achicar $\mathcal{U}$, y asumir $s = \frac{a}{f}$, $t = \frac{b}{g}$ con $a, b, f, g \in A$ $f, g \notin p$. Luego misma imagen en A_p

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{g} \text{ en } A_p \iff \exists\, h \notin p \;\; h(ga - bf) = 0 \text{ en } A$$

Así $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ $\forall A_q$ con $f, g, h \notin q$.
El conj abierto $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ satisface lo que queremos, y ahí $s = t$.
$\therefore$ representan el mismo germen a $\mathcal{O}_p$
$\therefore$ isomorfismo.

(b) • Definir $\Psi : A_f \longrightarrow \mathcal{O}(D(f))$

$$\frac{a}{f^n} \mapsto s \in \mathcal{O}(D(f)) \text{ que}$$

asigna $\frac{a}{f^n} \in A_p$.

- 1-1: $\Psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = \Psi\left(\frac{b}{f^m}\right)$

$\Rightarrow$ $\forall p \in D(f)$, $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ en A_p

$\Rightarrow$ $\exists\, h \notin p$ $h(f^m a - f^n b) = 0$ en A

Sea $\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}(f^m a - f^n b) \Rightarrow h \in \mathfrak{a}$ y $h \notin p$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \not\subset p$ $\forall p \in D(f) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$.

$V(\mathfrak{a}) \subset V((f)) \Rightarrow f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow f^l \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow f^l \cdot (f^m a - f^n b) = 0 \Rightarrow \frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ en A_f.

• Soluc: $\boxed{s} \in \mathcal{O}(D(f))$. Cubrir $D(f)$ por V_i's tal que s está representado por

$$\frac{a_i}{g_i}, \quad g_i \notin p, \quad \forall p \in V_i = D(h_i).$$

Es decir, $V_i = D(h_i) \subseteq D(g_i)$.

$\Rightarrow V((h_i)) \supseteq V((g_i)) \Rightarrow \sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)} \Rightarrow h_i^n \in (g_i)$

$\Rightarrow h_i^n = c g_i \Rightarrow \dfrac{a_i}{g_i} = \dfrac{c a_i}{h_i^n}$.

Luego reemplazando h_i por h_i^n y a_i por ca_i

$\Rightarrow D(f)$ está cubierta por $D(h_i)$ y $\boxed{s = \frac{a_i}{h_i} \text{ en } D(h_i)}$.

$D(h_i) = D(h_i^m)$

Ahora $D(f) = \bigcup D(h_i)$

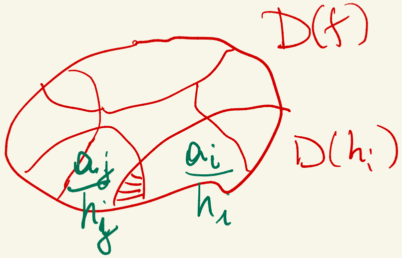
$\Rightarrow V((f)) \supseteq \bigcap V((h_i)) = V\left(\sum (h_i)\right)$

$\Leftrightarrow f \in \sqrt{\sum(h_i)} \Leftrightarrow f^n \in \sum(h_i) \quad \exists n$

$\Rightarrow * \boxed{f^n = \sum b_i h_i}, \quad b_i \in A$.

y por otro lado, $D(f) \subseteq D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$.

los fijamos.



$D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$

tenemos $A_{h_i h_j} \ni \dfrac{a_i}{h_i}, \dfrac{a_j}{h_j}$ representando a s.

$\therefore \quad (h_i h_j)^n \cdot (h_j a_i - h_i a_j) = 0$ en A.

Elegir $n >> 0$ para todos:

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0$$

$$\underset{h_j}{\overset{\shortparallel}{}} \qquad \underset{a_i}{\overset{\shortparallel}{}} \qquad \underset{h_i}{\overset{\shortparallel}{}} \qquad \underset{a_j}{\overset{\shortparallel}{}}$$

- Todavía en $D(h_i)$ tenemos $\frac{a_i}{h_i} \left(= \frac{h_i^n a_i}{h_i^{n+1}} \right)$ repr. as.

- Escribir $f^n \underset{*}{=} \sum b_i h_i$ como arriba.

Sea $a := \sum b_i a_i$

$\Rightarrow \quad \underset{\forall j}{h_j \cdot a} = \underset{\text{en } A}{\sum b_i (a_i h_j)} = \sum b_i h_i a_j = f^n a_j$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{f^n} = \frac{a_j}{h_j}$ en $D(h_j)$ $\forall j \Rightarrow \psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = s$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Def}}$.- Un <u>espacio anillado</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ consiste en X = esp. topológico, $\mathcal{O}_X$ = haz de anillos en X.

Un <u>morfismo</u> $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(f, f^\#)$ con $f : X \longrightarrow Y$ continua y $f^\#: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ morfismo de haces en Y. El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un <u>espacio localmente anillado</u> si para cada $p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ es local. Un morfismo de esp. local. anillados es un $(f, f^\#)$ de esp. anillados tal que

$$f^\#_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p} \text{ es}$$

un morfismo local $\left(f_p^{\#-1}(\mathfrak{m}_{\alpha}) = \mathfrak{m}_{\alpha} \right)$.

[Dado $p \in X$, $f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, induce $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ $\forall V \underset{f(p)}{\ni} \subset Y$.

Si V se mueve con $V \ni f(p) \Rightarrow f^{-1}(V)$ como vecindades de p, luego

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,f(p)} = \varinjlim\limits_{V \ni f(p)} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f^\#_p"'] & \varinjlim\limits_{V \ni f(p)} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,p} \end{tikzcd}$$
]

Un isomorfismo de espacios loc. anillados $(f, f^\#)$ es tal que f es homeom y $f^\#$ isom. de haces.

Prop 2.3:

(a) $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ es un esp. loc. anillado.

(b) $\varphi : A \to B$ homom. de anillos $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi}$ induce

$$(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

morfismo de esp. loc. anillados.

(c) Si A y B son anillos $\Rightarrow$ cualquier morfismos

$$(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$ loc. anillados

es inducido por (b).

Dem: (a) ✓

(b) Dado $\varphi : A \to B$, definir

$$f : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A), \quad f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

Si $\mathfrak{a}$ ideal de A $\Rightarrow$ $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\langle \varphi(\mathfrak{a}) \rangle)$,
y así continua.

Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)$, $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$ (anillos)

Para cada $V \subseteq \operatorname{Spec}(A)$, tenemos

$$f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}(f^{-1}(V))$$

homom. de anillos:

$\Big[$ $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) : V \to \coprod A_{\mathfrak{p}}$ $\Rightarrow$ $f^{\#}(s) :$

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "s"] \\
\coprod\limits_{\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{p}} & \coprod\limits_{\mathfrak{q} \in V} A_{\mathfrak{q}} \arrow[l, "\prod \varphi_{\mathfrak{p}}"']
\end{tikzcd}$$

$\Big]$

verificar que todo está ok.

(c) mirar Hart. Prop. 2.3 ■

Def: Un <u>esquema afín</u> es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ el cual es isomorfo a algún $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$. Un <u>esquema</u> es un esp. loc. anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que todo punto tiene una vecindad $\mathcal{U}$ tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ es un esquema afín.

(como esp l an)

[$Sp(X)$ esp. top. X, $\mathcal{O}_X$ haz estructural]

Un <u>morfismo de esquemas</u> es un morfismo como esp. loc. anillados. [Isom. ....].

<u>Ej 2.31</u>: k cuerpo. $\left(\underset{\text{pto}}{\underset{\|}{\operatorname{Spec}(k)}}, \underset{\text{“}k\text{”}}{\underset{\|}{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}}}\right)$

Si k' es otro cuerpo $\Rightarrow$ $\operatorname{Spec}(k) \xrightarrow{?} \operatorname{Spec}(k')$

Si lo hay, entonces $k' \longrightarrow k$ morfismo de anillos $\Rightarrow$ $k' \hookrightarrow k$. En particular, la característica es la misma.