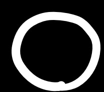
Grupos fin. pres. $\xleftarrow{\pi_1}$ Variedades top/Riem $\longleftarrow$ Variedades algebraicas suaves

$\cup$

Grupos hiperbólicos
(grupo fin. pres genérico)

Hoy: variedades son topológicas (suaves), compactas, sin borde, orientables, $\dim = \dim_{\mathbb{R}}$

Dimensiones bajas:

$\underline{\dim = 1}$ $\mathbb{S}^1 =$ 

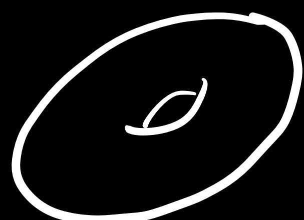
$\underline{\dim = 2}$ Uniformización

$\chi > 0$

$\shortparallel$

$\mathbb{CP}^1$

$\chi = 0$

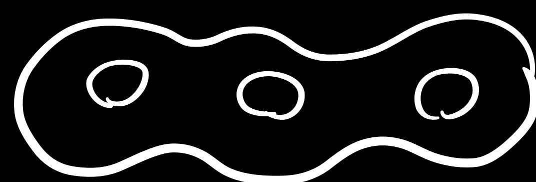


$\shortparallel$

$\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{C}$

$= \langle a, b \mid [a,b] \rangle$

$\chi < 0$



$g \geq 2$

$\shortparallel$

$\Gamma_g \backslash \mathbb{H}$

$= \langle a_1, b_1, \ , a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$

$\chi > 0$: $\pi_1 = \{1\}$ (finito)

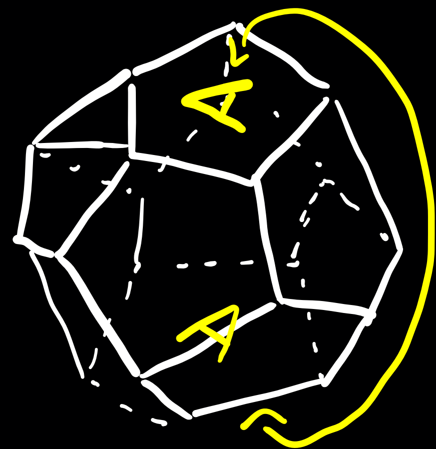
$\chi = 0$: π_1 infinito y abeliano $\qquad \therefore$ π_1 dice todo!

$\chi < 0$: π_1 infinito y no contiene $\mathbb{Z}^2$ (genérico)

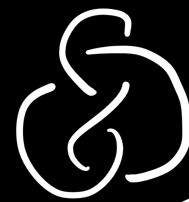
$\boxed{\text{dim} = 3}$ π_1 dice mucho! $\exists$ geometrización (Thurston-Perelman)

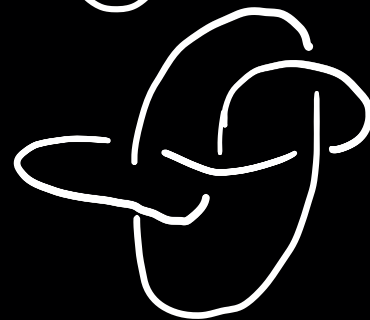
Ejemplos:

1) Espacio de Seifert-Weber



hiperbólica compacta

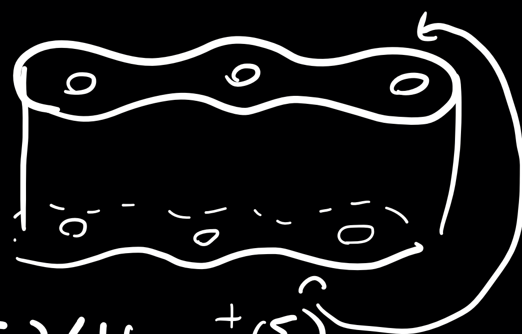
2) Complemento figura 8: $S^3 \setminus$ 

3) Complemento link Whitehead: $S^3 \setminus$ 

} no compactas (hiperbólicas de volumen finito)

Ejemplo (Mapping torus): Σ_g superficie $(g \geq 0)$ $(\dim_{\mathbb{R}} = 2)$, $f : \Sigma \to \Sigma$ homeo$^+$

$\rightsquigarrow$ $M = M_f = \Sigma \times [0,1] / (1,x) \sim (0, f(x))$



$\rightsquigarrow$ Fibración sobre S^1 con fibra Σ

Topología de M solo depende de Σ_g

clase de isotopía $[f] \in \mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Homeo}^+(\Sigma) / \mathrm{Homeo}_0^+(\Sigma)$

$\mathbb{Z} = \langle [f] \rangle$

$\rightsquigarrow$ $1 \to \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$

Mapping torus genérico : Σ genérico $(g \geq 2)$ + $[f] \in \overbrace{\mathrm{Mod}(\Sigma)}^{\text{grupo fin. pres.}}$ genérico

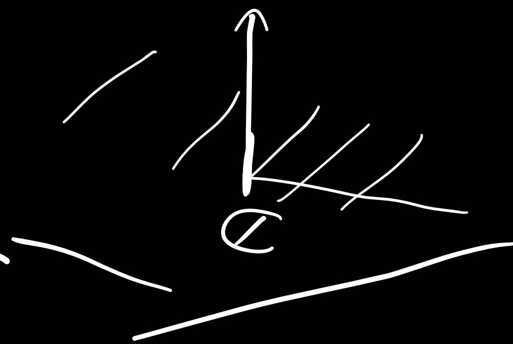
[f] pseudo Anosov $\quad$ p.A $\Rightarrow$ genérico

Teorema [Thurston, Maher '11, Choi '25]: En caso genérico

M_f es 3-variedad **hiperbólica (real):**

$\pi_1(M_f) \underset{\text{isometrías}}{\curvearrowright} \mathbb{H}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ + métrica hiperbólica

propiamente discontinua y $M_f \approx \pi_1(M_f) \backslash \mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$



Ejemplo (en $\mathbb{T}^2$): $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2\mathbb{Z} \Rightarrow A \curvearrowright \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$(x,y) \longmapsto (ax+by,\ cx+dy) \pmod 1$

$\Rightarrow$ A representa un homeo pseudo Anosov cuando $|\mathrm{tr} A| > 2$ $\quad$ e.g. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Teoremazos:

1) Perelman (03): Si M^3 asférica ($\tilde{M}$ contractible)

M hiperbólica $\longleftrightarrow$ $\pi_1(M)$ **hiperbólico** $\longleftrightarrow$ $\pi_1(M)$ infinito no contiene $\mathbb{Z}^2$

2) Agol (13): Si M hiperbólica, $\exists\ \hat{M} \to M$ cubrimiento finito con

$\hat{M} = M_f$ para $\Sigma_g \xrightarrow{f} \Sigma_g$ pseudo-Anosov y $g \geq 2$